Andrés Echeverría.

LEÇONS

DE GÉOMÉTRIE

SUIVIES

DE NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

qui se trouvent à la même Librairie :

LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE, 5e édition. 1 volume in-8°. Prix, broché. 4 fr.

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, précédées des Éléments de la Trigonométrie rectiligne, et comprenant l'application de l'Algèbre à la Théorie générale des courbes planes et spécialement de celles du second ordre, et aux questions fondamentales de la Géométrie à trois dimensions. 1 volume in-8°, avec 10 planches gravées. Prix, broché. 7 fr. 50 c.

THÉORIE de l'Élimination entre deux équations de degré quelconque à deux inconnues. Brochure in-4°. Prix. 2 fr. 50 c.

AVIS.

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

L. Hachette

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET, RUE DE VAUGIRARD, 9.

LEÇONS
DE GÉOMÉTRIE

SUIVIES

DE NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR P. L. CIRODDE

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU COLLÉGE ROYAL DE HENRI IV

OUVRAGE AUTORISÉ

PAR LE CONSEIL ROYAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

Deuxième édition

PARIS

CHEZ L. HACHETTE

LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE

RUE PIERRE-SARRAZIN, 12

1844

On a marqué d'une étoile (*) les articles qui ne sont pas d'une importance immédiate, et que l'on pourra omettre à une première lecture.

Les numéros placés entre parenthèses indiquent qu'il faut *toujours* se reporter aux articles correspondants. Par exemple, dans la ligne 19 de la page 17, le signe (36) marque un renvoi au théorème énoncé au numéro 36, et rappelle ainsi au lecteur que *par un point pris sur une droite on peut toujours lui élever une perpendiculaire, mais qu'on ne peut lui en élever qu'une seule d'un même côté.*

De même le signe (G., 448), que l'on trouve à la seconde ligne de la page 384, renvoie le lecteur au numéro 448 de la Géométrie, et lui rappelle ainsi que *la projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite.*

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE

ET ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. « J'AVANCE mon bras dans l'obscurité, dit M. *Biot* « dans son estimable traité de physique; il rencontre « un obstacle qui l'empêche de s'étendre; ma main, « promenée sur cet obstacle, trouve qu'il est limité, « qu'il finit à certains endroits, commence à d'autres, « et qu'autour de lui l'espace est libre : j'en conclus « que cet obstacle existe, ou paraît exister hors de moi, « dans une certaine portion de l'espace de laquelle « son existence m'exclut; d'après cela je l'appelle *un* « *corps*. Le premier de ces phénomènes, la *limitation*, « est le caractère de l'étendue *figurée*, c'est-à-dire « douée d'une forme. Le second, l'exclusion des autres « corps, est le caractère que l'on désigne par le nom « d'*impénétrabilité*. » L'étendue et l'impénétrabilité, voilà les deux propriétés essentielles de la matière. Or il est possible, sinon de réaliser, au moins de concevoir des portions de l'espace qui seraient terminées de

toute part, sans être pour cela impénétrables : c'est là précisément ce que nous ferons dans tout le cours de cet ouvrage. Ainsi *un* CORPS *ne sera, pour nous, qu'une portion de l'espace indéfini*, PÉNÉTRABLE, DIVISIBLE ET FIGURÉE. Cette portion de l'espace a toujours trois *dimensions : longueur, largeur* et *épaisseur*. Cette dernière prend quelquefois le nom de *hauteur* ou de *profondeur*.

2. *Les limites des corps s'appellent* SURFACES. Les surfaces sont étendues en longueur et en largeur seulement.

3. Lorsque deux surfaces se rencontrent, leur intersection est leur limite commune, et on l'appelle *ligne*. Ainsi *les* LIGNES *sont les limites des surfaces*. Elles ne sont étendues qu'en longueur.

4. Lorsque deux lignes se rencontrent, leur intersection est leur limite commune, et on l'appelle *point*. *Donc les* POINTS *sont les limites des lignes*. Le point n'a pas d'étendue.

5. Un corps ne saurait exister sans réunir les trois dimensions de l'étendue. Ainsi les surfaces, les lignes et les points n'existent pas indépendamment du corps, de la surface, ou de la ligne auxquels ils servent respectivement de limites; cependant nous pouvons très-bien, par une abstraction de notre esprit, les considérer isolément. Quand on se propose, par exemple, de mesurer la profondeur d'un réservoir, on ne s'occupe nullement de sa longueur et de sa largeur; tandis que si l'on veut en évaluer la surface, c'est de la profondeur au contraire qu'il n'est plus question. Mais on sent que si l'on a besoin de connaître la quantité d'eau contenue dans ce réservoir, on devra avoir égard à la fois à ses trois dimensions. En conséquence, nous étudierons successivement les propriétés des lignes, des surfaces et des corps considérés relativement à leur étendue, et nous apprendrons à les mesurer. Tel est l'objet et la division naturelle de la *géométrie*. Nous définirons donc LA GÉOMÉTRIE *une science qui a pour*

objet l'étude des propriétés de l'étendue et la mesure de cette étendue.

6. On distingue trois sortes de lignes : *la droite, la brisée* et *la courbe.*

7. Il n'est personne qui ne sache très-bien ce que c'est qu'une ligne droite : l'arête d'une règle bien dressée nous en offre un exemple. Tout le monde sait encore que *la ligne droite est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre*, et qu'en conséquence, *entre deux points donnés on ne peut tirer qu'une ligne droite.* Ce sont là des idées que nous acquérons dès notre enfance, et sur lesquelles tous les hommes sont d'accord.

8. Il suit de là 1° que *deux droites distinctes ne peuvent avoir qu'un seul point commun ;*

2° Que *la ligne droite, qui joint deux points,* étant le plus court chemin pour aller de l'un à l'autre, *est la mesure naturelle de la distance de ces deux points.*

Théorème I.

9. *Deux droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue* ([1]).

Soient en effet ZX et Z'X' deux lignes droites, et supposons que l'on porte la seconde sur la première, en plaçant les points A' et B' respectivement sur les points A et B. D'abord il est clair que les deux droites coïncideront parfaitement dans l'intervalle de A à B (**7**); mais en sera-t-il de même au delà de ces points? Supposons qu'elles se séparent en C, de sorte que A'X' prenne la position ABCY, et faisons tourner cette dernière autour de A, de manière à amener un quelconque Y de ses points sur la première droite. Il est évident que tous les points de ABY, à l'exception de A, auront participé à son mouvement, et qu'ainsi tous Fig. 1.

([1]) Il y a des lignes droites de toute grandeur, car on peut supposer aussi éloignés qu'on le voudra les deux points dont une pareille ligne mesure la distance.

ceux de ses points qui se trouvaient sur ABX s'en seront détachés. Nous aurons donc ainsi deux droites distinctes de A en X, ce qui est absurde : donc il était pareillement absurde de supposer que les deux droites pussent se séparer; donc elles coïncident entièrement.

10. COROLLAIRE I. *Deux points donnés déterminent la position d'une droite :* car on peut évidemment tirer une ligne droite par ces deux points (**7**), et nous venons de voir qu'on ne peut en faire passer qu'une.

11. COROLLAIRE II. Lorsque l'on fait coïncider une ligne droite finie AB avec une portion d'une ligne droite indéfinie ZABX, on peut regarder les parties AZ et BX de celle-ci comme les *prolongements* de l'autre.

12. *Une ligne* BRISÉE *est un assemblage de lignes droites consécutives que l'on appelle ses côtés.*

13. *Une ligne courbe est une ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites.*

Fig. 2. ACDB est une ligne brisée, et AMB est une ligne courbe.

14. Il est évident que *l'on peut mener d'un point à un autre une infinité de lignes courbes ou brisées.*

15. Il suit des définitions mêmes du point et de la ligne (**3** et **4**) *que l'on peut regarder une ligne comme engendrée par le mouvement d'un point, et une surface par le mouvement d'une ligne.*

16. De même qu'il y a des lignes droites et des lignes courbes, de même il y a aussi des surfaces planes et des surfaces courbes.

LA SURFACE PLANE *ou* LE PLAN *est une surface telle, que, si l'on joint deux quelconques de ses points par une ligne droite, cette droite est tout entière sur la surface.* Il suit de là que, pour vérifier si une portion de surface est plane, il n'y a qu'à lui appliquer l'arête d'une règle bien dressée, et voir si, dans chaque position, la règle coïncide exactement avec la surface.

17. *Une surface courbe est celle qui n'est ni plane ni composée de surfaces planes.*

THÉORÈME II.

18. *Trois points qui ne sont pas situés en ligne droite* DÉTERMINENT *un plan, c'est-à-dire qu'on peut toujours faire passer un plan par ces trois points, mais qu'on ne peut en faire passer qu'un.*

Soient A, B, C ces trois points. Joignons-en deux Fig. 3. quelconques, A et B, par exemple, par une ligne droite. On pourra évidemment (**16**) faire passer un plan par la droite A B, et si l'on conçoit que ce plan tourne autour de cette droite, il viendra bientôt s'appuyer sur le point C : donc déjà on peut faire passer un plan par les trois points A, B, C.

Je dis maintenant que l'on n'en pourra faire passer qu'un seul. Supposons, en effet, que l'on puisse mener un second plan par les trois points A, B, C, et joignons A C. Il suit de la définition du plan que les deux droites indéfinies A B et A C seront tout entières dans chacun des deux plans. Cela posé, tirons une ligne droite M N par un point quelconque M du second plan et un point quelconque N de A C, qui soit situé de l'autre côté de A B par rapport au point M; cette droite M N coupera nécessairement A B; donc elle aura deux points dans chaque plan, et par conséquent elle y sera tout entière. Donc tout point M du second plan est en même temps dans le premier; donc ces deux plans coïncident; donc trois points non en ligne droite déterminent un plan.

THÉORÈME III.

19. *Deux droites*, AB *et* CD, *qui se coupent*, DÉTERMINENT *un plan.* Fig. 4.

Marquons, en effet, les deux points B et D sur les droites A B et C D. Il sera toujours possible de faire passer un plan par les trois points B, O, D qui ne sont pas en ligne droite, et ce plan contiendra les droites A B

et CD : car chacune aura deux points dans ce plan ; de plus, on n'en fera passer qu'un seul, sans quoi deux plans pourraient avoir les trois points communs B, O, D sans coïncider. Donc par deux droites qui se coupent on peut faire passer un plan, et l'on ne peut en faire passer qu'un : donc deux pareilles droites déterminent un plan.

Théorème IV.

20. *L'intersection de deux plans est une ligne droite, et celle de trois plans est un point.*

1° D'abord l'intersection de deux plans est une ligne droite; car si l'on pouvait trouver sur cette intersection trois points qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans dont il s'agit, passant chacun par ces trois points, coïncideraient (18), ce qui est contre l'hypothèse.

2° L'intersection de trois plans, n'étant évidemment que l'intersection de l'un d'eux avec la droite suivant laquelle les deux autres se coupent, sera par conséquent un point.

21. On ne considère dans la géométrie élémentaire qu'une seule espèce de ligne courbe, *la circonférence du cercle.* On appelle ainsi *une ligne dont tous les points sont situés sur un même plan, et également éloignés d'un autre point pris dans ce plan. Ce point*
Fig. 5. *se nomme le* CENTRE. ABCD est une circonférence dont O est le centre. Les lignes qui, comme OA, vont du centre à la circonférence, se nomment *rayons.* Il est visible que tous les rayons sont égaux, puisqu'ils mesurent les distances du centre aux différents points de la circonférence (8, 2°).

On appelle *diamètre* une droite qui, passant par le centre, va se terminer à la circonférence. Un diamètre est donc la somme de deux rayons, et ainsi *tous les diamètres sont égaux.*

Une partie quelconque de la circonférence se nomme *arc ;* ainsi AB, BC...... sont des arcs.

La partie du plan enveloppée par la circonférence est LE CERCLE.

22. Il est clair que l'on décrira une circonférence en fixant sur un plan une des pointes d'un compas ouvert, et en faisant tourner l'autre pointe autour de la première, de manière qu'elle ne quitte pas le plan.

Remarquons que l'empreinte laissée sur le plan par la pointe mobile n'est pas rigoureusement une ligne : car elle a nécessairement de la largeur ; mais aussi qu'elle en différera d'autant moins que cette pointe sera plus fine. *La pointe à tracer devra donc être aussi aiguë qu'il sera possible.*

LIVRE PREMIER.[1]

DES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA LIGNE DROITE.

§. I. *De la mesure des lignes droites.*

PROBLÈME I.

23. *Mesurer une droite donnée.*

Mesurer une ligne droite, c'est chercher le rapport de cette droite à une autre que l'on est *convenu* de prendre pour unité. Or si cette unité est contenue un nombre exact de fois dans la droite à mesurer, ce nombre est la mesure demandée; mais lorsqu'il n'en est pas ainsi, il faut chercher s'il n'y a pas une certaine longueur qui, étant contenue exactement dans l'unité linéaire et dans la droite donnée, soit par conséquent la commune mesure de toutes deux. Si l'on trouve, par exemple, que la droite donnée et l'unité linéaire contiennent respectivement 15 fois et 7 fois une même longueur, on en conclura que cette longueur est *le septième* de l'unité linéaire, et qu'ainsi la droite à mesurer vaut quinze fois le septième de cette unité, c'est-à-dire qu'elle en est les $\frac{15}{7}$. Donc *la mesure demandée est exprimée par une fraction dont les deux termes sont les nombres de mesures communes contenues dans les deux droites que l'on a comparées.* Quoique cette fraction ne soit pas assignable numériquement, lorsque la droite proposée est incommensurable avec l'unité, elle n'en existe pas moins, et nous verrons, dans un instant, que l'on peut, sinon l'obtenir

---

(1) Dans les cinq premiers Livres de cet ouvrage, nous supposerons toutes les figures tracées sur un même plan.

exactement, du moins en approcher d'aussi près que l'on veut.

24. La détermination de la mesure d'une droite est donc ramenée à la solution de ce problème : *Deux droites* AB et CD *étant données, trouver leur commune mesure si elles en ont une.* Fig. 6.

Si l'on raisonne sur les deux droites données comme on l'a fait dans l'arithmétique, quand il s'est agi de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on sera conduit à porter la plus petite CD sur la plus grande AB, autant de fois que la chose sera possible, et l'on trouvera qu'elle y est contenue deux fois de A en F avec un reste FB; de sorte que

$$AB = 2CD + FB \ldots\ldots\ldots\ldots [1],$$

ce qui montre que CD n'est pas la commune mesure demandée. Mais on verra encore, comme dans l'arithmétique, que la plus grande commune mesure des droites AB et CD est la même que celle de CD et de FB. Je porte donc FB sur CD, et je trouve qu'elle y est contenue trois fois de C en G, avec un reste GD : donc

$$CD = 3FB + GD \ldots\ldots\ldots\ldots [2].$$

Je porte maintenant GD sur FB : elle y est comprise une fois, avec un reste IB : donc

$$FB = GD + IB \ldots\ldots\ldots\ldots [3].$$

Enfin, en portant IB sur GD, on trouvera qu'elle y est contenue trois fois exactement, et qu'ainsi

$$GD = 3IB.$$

IB est donc la plus grande commune mesure des droites AB et CD.

Concluons de là que, *pour trouver la plus grande commune mesure de deux droites, il faut leur appliquer la méthode donnée en arithmétique pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.* En conséquence on est convenu d'appeler *quotient incomplet* le nombre entier qui indique combien de fois un *reste* quelconque est contenu dans le précédent.

25. Maintenant que nous connaissons la commune mesure des droites AB et CD, il faut, pour évaluer leur rapport, déterminer combien de fois chacune d'elles contient IB. Or l'équation [3] nous montre que, comme GD=3IB, FB vaudra 3IB+IB=4IB. En remontant de même aux équations [2] et [1], on trouvera d'abord que CD vaut d'une part trois fois 4IB ou 12IB, et de l'autre 3IB, ce qui fait 15IB; ensuite que AB contient deux fois 15IB ou 30IB, et encore 4IB, c'est-à-dire 34IB. Donc, puisque la commune mesure IB est contenue trente-quatre fois dans AB et quinze fois dans CD, on en conclut que le rapport de ces deux droites est $\frac{34}{15}$, et que par conséquent, si CD est l'unité linéaire, cette fraction $\frac{34}{15}$ est la mesure ou *la longueur* de AB.

26. *Nous appellerons désormais* LONGUEUR D'UNE LIGNE *le rapport de cette ligne à l'unité linéaire.*

27. Remarquons que cette fraction $\frac{34}{15}$ est nécessairement irréductible, sans quoi IB ne serait pas la plus grande commune mesure des droites AB et CD. On voit en effet que si l'on avait trouvé, par exemple, AB=35IB, auquel cas le rapport de AB à CD serait $\frac{35}{15}$, fraction dont les deux termes sont divisibles par 5, ces deux droites auraient 5IB pour commune mesure : car alors AB et CD vaudraient respectivement 7 fois et 3 fois 5IB.

28. Lorsque deux droites A et B sont commensurables, l'opération du n° 24 se termine nécessairement : car si p et q indiquent combien de fois elles contiennent cette commune mesure K, on a $A=pK$ et $B=qK$, de sorte que l'opération dont il s'agit ne diffère pas de celle qu'il faudrait exécuter sur les nombres p et q pour déterminer leur plus grand commun diviseur, et celle-ci n'exige qu'un nombre fini de divisions.

29. Si au contraire les droites A et B sont incommensurables, l'opération ne peut pas se terminer (¹) : car

(¹) Observons qu'il n'en sera jamais ainsi dans la pratique :

si l'on pouvait trouver un reste qui fût contenu exactement dans le précédent, ce reste serait une commune mesure des droites A et B.

Quelle idée faut-il alors se faire du rapport de ces droites? Supposons qu'en négligeant un reste quelconque on regarde le précédent, que je désignerai par K, comme la commune mesure des deux droites A et B, et admettons que ces droites contiennent p fois et q fois la droite K avec des restes respectifs α et β moindres que K. On aura $A-\alpha=pK$ et $B-\beta=qK$: donc le rapport $\frac{A-\alpha}{B-\beta}$ est égal à $\frac{p}{q}$. Or α et β sont deux quantités variables qui sont d'autant plus petites que le reste K, auquel on s'est arrêté, est lui-même plus petit, et qui ont par conséquent *zéro* pour (arith. 209) limite [1]; donc le rapport $\frac{A-\alpha}{B-\beta}$ tend vers une certaine limite, et comme ses deux termes convergent respectivement vers A et B, cette limite est ce qu'on appelle le rapport de A à B. Donc LE RAPPORT DE DEUX GRANDEURS INCOMMENSURABLES *est la limite vers laquelle tendent les rapports successifs que l'on obtient, lorsqu'on remplace ces grandeurs par des quantités commensurables qui en approchent indéfiniment* [2].

---

car on arrivera bientôt à un reste qui échappera aux sens par sa petitesse.

[1] On ne saurait douter que les quantités α et β n'aient zéro pour limite : car, si l'on considère trois restes consécutifs quelconques R, R′, R″, on a $R' > R''$. Mais R vaut au moins $R' + R''$: donc il est plus grand que $2R''$; donc un reste quelconque est moindre que la moitié du reste antéprécédent; donc le 2e, le 4e, le 6e....... restes sont respectivement plus petits que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$........ de la plus petite droite B, donc après un nombre suffisant d'opérations on arrivera à un reste K moindre que toute droite donnée (arith. 303). Mais α et β sont plus petites que K : donc ces quantités ont bien zéro pour limite.

[2] On peut arriver d'une manière plus directe, mais moins naturelle, à l'idée que l'on doit se former du rapport de deux grandeurs incommensurables A et B. Supposons, en effet,

Ainsi, quand les droites A et B seront commensurables, on calculera exactement leur rapport, mais quand elles seront incommensurables, on ne pourra l'obtenir qu'avec approximation; cette approximation sera d'ailleurs aussi grande que l'on voudra, puisqu'il s'agira pour cela de s'arrêter à un reste suffisamment petit.

*30. Désignons par q, q', q''...... les quotients, et par R, R', R''.... les restes successifs que l'on a trouvés en cherchant la commune mesure des droites A et B, on aura d'abord:

$$A = qB + R,$$

d'où l'on voit que le rapport $\frac{A}{B}$ sera la somme des rapports $\frac{Bq}{B}$ et $\frac{R}{B}$, c'est-à-dire qu'il est égal au quotient q augmenté du rapport $\frac{R}{B}$; mais ce dernier est égal à l'unité divisée par ce rapport renversé, c'est-à-dire par le rapport $\frac{B}{R}$: donc

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{\frac{B}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1].$$

On aura ensuite les égalités

$$B = q'R + R',$$
$$R = q''R' + R'',$$
etc.

---

qu'ayant partagé l'une de ces grandeurs, B, par exemple, en un certain nombre q de parties égales, on cherche combien de fois A contient une de ces parties; on trouvera pour quotient un certain nombre p et un reste α plus petit que cette même partie de B, de sorte que le rapport de $(A-\alpha)$ à B sera égal à $\frac{p}{q}$; le rapport $\frac{p}{q}$ variera avec le nombre des divisions de B, et α tendra vers zéro, à mesure que ce nombre deviendra plus grand; donc la limite de $(A-\alpha)$ est A, et le rapport $\frac{A-\alpha}{B} = \frac{p}{q}$ tend vers une certaine limite, qui est ce qu'on appelle le rapport des deux quantités incommensurables A et B; donc LE RAPPORT DE DEUX GRANDEURS INCOMMENSURABLES, etc.

desquelles on tirera, comme tout à l'heure,

$$\frac{B}{R}=q'+\cfrac{1}{\cfrac{R}{R'}}\ldots\ldots\ldots\ldots[2],$$

$$\frac{R}{R'}=q''+\cfrac{1}{\cfrac{R'}{R''}}\ldots\ldots\ldots\ldots[3],$$

etc.

Substituant, dans [1], à $\frac{B}{R}$ sa valeur [2]; puis, dans l'expression résultante, à $\frac{R}{R'}$ sa valeur [3], et ainsi de suite, on trouvera en définitive :

$$\frac{A}{B}=q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\text{etc.}}}.$$

Une pareille expression se nomme une *fraction continue ;* de sorte qu'UNE FRACTION CONTINUE *est une expression composée d'un nombre entier, qui peut être nul, augmenté d'une fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur un nombre entier, augmenté d'une fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur un nombre entier augmenté, etc.*

On voit donc que, *pour développer le rapport de deux quantités quelconques en fraction continue, il faut exécuter les opérations nécessaires pour obtenir leur plus grande commune mesure, et ajouter ensuite au premier quotient incomplet une fraction ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le second quotient incomplet, augmenté d'une fraction ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le troisième quotient incomplet, augmenté, etc.*

Il suit de là que *le développement d'une quantité commensurable en fraction continue se termine nécessairement.* Ainsi, dans l'exemple du n° **24**, le rapport des deux droites AB et CD a pour expression la fraction continue :

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}.$$

La fraction ordinaire équivalente à une portion de la fraction continue totale prise à partir de l'origine de cette fraction, a reçu le nom de RÉDUITE *ou de* FRACTION CONVERGENTE.

Soit la fraction continue

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6}}},$$

et proposons-nous de former ses diverses réduites. La première est 2 ; la seconde est la valeur de $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$. La troisième est la valeur de $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}$. Or $3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$, donc $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}=\cfrac{1}{\frac{13}{4}}=\frac{4}{13}$, et par conséquent notre réduite est égale à $2+\frac{4}{13}=\frac{30}{13}$.

La quatrième réduite est la valeur même de la fraction continue totale. Or $4+\frac{1}{6}=\frac{25}{6}$; donc $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6}}=\cfrac{1}{\frac{25}{6}}=\frac{6}{25}$; par suite $3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6}}=3+\frac{6}{25}=\frac{81}{25}$; donc $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6}}}=\cfrac{1}{\frac{81}{25}}=\frac{25}{81}$, et par conséquent la fraction continue est égale à $2+\frac{25}{81}=\frac{187}{81}$.

Il suit de là que *le développement d'une quantité incommensurable en fraction continue ne peut pas se terminer*, sans quoi, en formant toutes les réduites, on trouverait une grandeur commensurable, pour valeur de cette quantité incommensurable.

On voit ainsi que les fractions trouvées, en regardant successivement chaque reste comme la commune mesure des droites A et B, sont précisément les fractions convergentes de cette fraction continue, de sorte que la valeur obtenue pour le rapport $\frac{A}{B}$, en s'arrêtant à un certain reste, est effectivement d'autant plus approchée que l'on aura poussé l'opération plus loin.

Théorème I.

Fig. 7. **31**. *Si deux lignes brisées* ABC *et* AOC, *composées chacune de deux lignes droites, se terminent aux mêmes points* A *et* C, *et que l'une enveloppe*

l'autre [1], *la première sera plus grande que la seconde.*

Prolongeons en effet AO jusqu'à sa rencontre en D avec BC, le point D sera situé entre B et C, puisque ABC enveloppe AOC. Cela posé, la droite OC est plus courte que la brisée ODC (7) : donc, en ajoutant AO de part et d'autre, on aura :

$$AOC < ADC.$$

D'un autre côté la droite AD est plus courte que la brisée ABD : donc, en ajoutant BD de part et d'autre, on aura :

$$ADC < ABC;$$

Donc AOC, qui est moindre que ADC, est à plus forte raison plus petite que ABC.

§. II. *Des perpendiculaires et des obliques.*

32. Lorsque deux droites AB, CD, se coupent, Fig. 4.
elles partagent le plan qu'elles déterminent (**19**) en quatre parties AOC, COB, BOD, DOA, dont chacune s'appelle un *angle.* Ainsi *un* ANGLE *est une portion indéfinie de surface plane, comprise entre deux droites qui se coupent, et sont terminées à leur point de section.* Ce point se nomme *le sommet* de l'angle, et les deux droites en sont *les côtés.* Ainsi O est le sommet de l'angle AOC, et AO et OC sont ses deux côtés. On désigne, comme on voit, un angle par trois lettres, dont les deux extrêmes indiquent deux points de ses côtés, et dont celle du milieu appartient au sommet. Quelquefois même on dénomme un angle par la lettre placée à son sommet; mais il faut, pour cela, que ce sommet ne soit pas commun à d'autres angles. Ainsi, dans la figure 2 nous pourrons dire l'angle C pour désigner l'angle ACD.

---

[1] Une ligne est enveloppée par une autre qui a les mêmes extrémités qu'elle, lorsque toutes les deux sont situées d'un même côté de la droite qui joint ces extrémités.

33. Remarquons que la grandeur d'un angle dépend de la quantité de surface plane comprise entre ses côtés, et par conséquent de leur écartement : ainsi, si
Fig. 8. l'on fait sur AB l'angle DAB égal à BAC, sur AD l'angle FAD=DAB, etc., les angles DAC, FAC,.... seront respectivement double, triple,...... de l'angle BAC. D'où il suit qu'on peut très-bien comparer plusieurs angles à l'un d'eux pris pour *unité*, par suite les mesurer, et conséquemment les soumettre à toutes les opérations du calcul. Ainsi, en prenant BAC pour unité, les angles DAC et FAC vaudront l'un 2, et l'autre 3 unités.

34. Puisque les côtés d'un angle doivent toujours être supposés indéfinis, et que deux droites coïncident dans toute leur étendue lorsqu'elles ont seulement deux points communs (9), on devra conclure que *deux angles sont égaux lorsque, étant placés l'un sur l'autre, ils se recouvrent parfaitement dans une certaine portion de leur étendue.*

Fig. 9. **35.** Si l'on conçoit qu'une droite OC, d'abord couchée sur OA, tourne autour du point O, en s'éloignant de la partie OA, cette droite formera avec AB deux angles que l'on appelle *adjacents*, dont l'un, COA, ira constamment en augmentant depuis zéro, et dont l'autre, COB, ira au contraire en diminuant sans cesse jusqu'à devenir nul, ce qui arrivera quand CO sera couchée sur OB. On conçoit, d'après cela, qu'il y aura une position OD de la droite mobile et une seule, dans laquelle elle fera avec AB deux angles égaux, DOA et DOB : on dit qu'elle est alors *perpendiculaire* sur AB. Ainsi *une droite est* PERPENDICULAIRE *sur une autre lorsqu'elle fait avec cette autre deux angles adjacents égaux, et ces angles se nomment* ANGLES DROITS.

Théorème II.

36. *Par un point pris sur une droite on peut tou-*

jours lui élever une perpendiculaire, mais on ne peut lui en élever qu'une seule d'un même côté.

La vérité de cette proposition est une conséquence immédiate des considérations précédentes.

THÉORÈME III.

37. *Tous les angles droits sont égaux entre eux.*

Soient OC perpendiculaire sur AB, et O'C' perpendiculaire aussi sur A'B'; je dis que les angles droits C'O'A' et C'O'B' sont égaux aux angles droits COA et COB. Marquons, en effet, sur le côté AO le point quelconque D, et prenons sur O'A' la distance O'D'= OD. Supposons maintenant que l'on porte la figure C'A'B' sur la figure CAB, en plaçant les points O' et D' respectivement sur les points correspondants O et D, ce qui est possible, puisque O'D'=OD; les deux droites A'B' et AB coïncideront alors dans toute leur étendue (**9**), et par conséquent O'C' tombera sur OC, sans quoi on aurait par le même point O deux perpendiculaires sur AB, ce qui ne se peut (**36**). Donc les angles C'O'A' et C'O'B' recouvriront parfaitement les angles respectifs COA et COB : donc ces angles sont égaux; mais ils sont droits : donc les angles droits sont égaux. Fig. 10.

38. On appelle angle *aigu* tout angle moindre qu'un droit, et tout angle plus grand qu'un droit se nomme angle *obtus*. Ainsi dans la fig. 9, où OD est perpendiculaire sur AB, l'angle COB est un angle obtus, et COA est un angle aigu.

THÉORÈME IV.

39. *Lorsqu'une droite* OC *en rencontre une autre* AB, *la somme des deux angles adjacents* COA *et* COB *est égale à deux angles droits.* Fig. 9.

Élevons par le point O la perpendiculaire OD sur AB, ce qui formera les deux angles droits DOA et DOB. Cela posé, l'angle COB se compose des angles COD et DOB : donc la somme des deux angles AOC et COB

sera celle même des trois angles AOC, COD et DOB. Mais les deux premiers réunis forment l'angle droit AOD, le troisième DOB est aussi droit : donc enfin la somme des deux angles AOC et COB est égale à celle des deux angles droits AOD et DOB, et par conséquent à celle de deux angles droits quelconques (37).

40. Corollaire i. Si l'un des angles COA et COB est droit, l'autre l'est aussi.

41. Corollaire ii. *Si une droite* OD *est perpendiculaire sur une autre* AB, *réciproquement cette seconde sera perpendiculaire sur la première.*

En effet, prolongeons OD au-dessous de AB, l'angle AOD est droit par hypothèse (35) : donc son adjacent AOF l'est aussi; donc AO forme avec DF deux angles adjacents égaux AOD et AOF (37); donc AO est perpendiculaire sur DF.

42. Corollaire iii. Puisque l'angle AOF est droit, son adjacent FOB l'est aussi : donc OF est perpendiculaire sur AB; donc *lorsqu'une droite* OD *est perpendiculaire sur une autre* AB, *son prolongement* OF *l'est aussi.*

Fig. 11. **43.** Corollaire iv. *La somme de tous les angles* IOA, AOB, BOC, *formés autour d'un même point et du même côté d'une droite* IC, *est égale à deux droits* : car leur somme est la même que celle des deux angles adjacents IOB et BOC.

44. Corollaire v. *La somme de tous les angles* AOB, BOC, COD, DOA, *formés autour d'un même point* O, *est égale à quatre droits.* Prolongeons en effet CO en OI, il est évident, d'après le corollaire précédent, que la somme des angles IOA + AOB + BOC + COD + DOI est égale à quatre droits. Mais IOA + DOI = AOD : donc, etc.

45. Lorsque la somme de deux angles est égale à deux angles droits, on dit que chacun d'eux est *le supplément* de l'autre, ou que ces angles *sont supplémentaires.* On voit que *deux angles qui ont le même sup-*

plément sont égaux, puisqu'en leur ajoutant un même angle on obtient la même somme, deux angles droits.

46. Lorsque la somme de deux angles est égale à un angle droit, on dit que chacun d'eux est le *complément* de l'autre, ou que ces angles sont *complémentaires.* On voit que *deux angles qui ont le même complément sont égaux.*

Théorème V.

47. *Si deux angles adjacents* COA *et* COB *sont supplémentaires, les côtés extérieurs* AO *et* OB *sont en ligne droite.* Fig. 9.

En effet, si OB n'est pas le prolongement de AO, nous pourrons prolonger celle-ci en OG, et alors, la ligne AOG étant droite, l'angle COG sera le supplément de COA (39); mais l'angle COB est aussi, par hypothèse, le supplément de COA; donc COG = COB (45), ce qui est absurde : donc on ne pouvait pas supposer que OB ne fût pas le prolongement de AO; donc AOB est une ligne droite.

48. Scholie. Lorsque deux propositions sont telles que, le sujet étant le même, l'hypothèse que l'on fait dans l'une est précisément le jugement que l'on porte dans l'autre, et *vice versâ,* on dit que l'une est la *réciproque* de l'autre. Ainsi la proposition précédente est la réciproque de celle du n° 39 : car dans toutes deux la droite OC, qui concourt à former les angles COA et COB, est le sujet; l'hypothèse et le jugement de la proposition du n° 39 sont respectivement : AOB *est une ligne droite, et* COA + COB *égale deux droits;* tandis que l'hypothèse et le jugement de celle du n° 47 sont au contraire : COA + COB *égale deux droits, et* AOB *est une ligne droite.*

La plupart des réciproques peuvent se démontrer par la réduction à l'absurde de la manière suivante : *Exécutez une construction qui réalise l'hypothèse de la proposition directe; appliquez alors cette proposition, et comparez le jugement qui en résulte à l'hy-*

pothèse de votre réciproque. Si le résultat de cette comparaison est absurde, votre réciproque est vraie.

Ainsi dans la démonstration du n° 47 nous avons prolongé AO en OG, ce qui a *réalisé* l'hypothèse de la proposition directe : car nous avons eu ainsi une droite OC rencontrant une autre droite AOG ; nous avons alors appliqué la proposition directe, en disant que COG est le supplément de COA ; nous avons comparé ce jugement à l'hypothèse de notre réciproque, savoir : COB est le supplément de COA, et nous en avons *conclu* que COB = COG, ce qui est absurde. Notre réciproque est donc vraie.

Théorème VI.

Fig. 4. **49.** *Lorsque deux droites* AB *et* CD *se coupent, les angles opposés par le sommet, tels que* AOC *et* BOD, *sont égaux.*

En effet, puisque AOB est une ligne droite, l'angle COB est le supplément de COA ; de même, puisque COD est une ligne droite, l'angle COB est aussi le supplément de BOD ; donc les deux angles COA et BOD, qui ont le même supplément sont égaux.

Théorème VII.

50. *Par un point donné on peut mener une perpendiculaire à une droite donnée, mais on ne peut lui en mener qu'une seule.*

Il peut arriver deux cas, selon que le point donné est situé sur la droite donnée, ou hors de cette droite. Le premier cas a été démontré aux n°s 36 et 42 ; occupons-nous donc du second.

Fig. 12. Je suppose que le point C soit pris hors de la droite AB, et je dis d'abord que de ce point on peut abaisser une perpendiculaire sur cette droite. Pour le prouver, je fais tourner la partie supérieure du plan autour de AB comme charnière, jusqu'à ce que le point C soit venu se placer quelque part en C′ sur sa partie inférieure ; je joins CC′ et soit D le point où cette droite

coupe AB. Si l'on replie de nouveau la figure le long de AB, le point D restera immobile, et ainsi l'angle CDA recouvrira C'DA; donc AB est perpendiculaire sur CC', et réciproquement CC' est perpendiculaire sur AB (41).

Supposons maintenant qu'on puisse abaisser du point C une seconde perpendiculaire CI sur AB : si l'on fait tourner la partie supérieure du plan autour de AB, CI viendra se rabattre sur C'I, donc l'angle C'ID est droit comme son égal CID; mais ces deux angles sont adjacents, donc leurs côtés extérieurs CI et IC' sont en ligne droite; donc on a, du point C au point C', deux lignes droites distinctes, ce qui est absurde (7); donc il n'est pas possible d'abaisser du point C deux perpendiculaires sur AB.

51. On dit qu'*une droite est* OBLIQUE *à une autre lorsqu'elle la rencontre sans lui être perpendiculaire* Il suit du numéro précédent que si d'un point C on abaisse une perpendiculaire CD sur AB, toute droite telle que CI, qui, partant du point C, ira rencontrer AB, sera oblique à celle-ci.

Théorème VIII.

52. *Lorsqu'une perpendiculaire* CD *et une oblique* CI *à une droite* AB, *partent du même point* C, *la perpendiculaire est plus courte que l'oblique.*

En effet, faisons tourner la partie supérieure du plan autour de AB comme charnière, jusqu'à ce que le point C vienne se placer quelque part en C' sur sa partie inférieure; joignons C'D et C'I : ces droites seront les rabattements de CD et de CI, et ainsi leur seront égales; de plus, CDC' sera une ligne droite, puisque les angles CDI et C'DI sont droits (47), donc CDC' est plus petite que la ligne brisée CIC'; donc CD, moitié de CDC', est moindre que CI, moitié de CIC'; ce qu'il fallait démontrer.

53. Corollaire I. *La perpendiculaire, étant la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener*

d'un point à une droite, est la mesure naturelle de la distance de ce point à cette droite.

54. Corollaire ii. *Lorsqu'une droite est la plus courte que l'on puisse mener d'un point à une droite, elle lui est perpendiculaire,* sans quoi elle ne serait pas la plus courte.

Théorème IX.

55. *Si une perpendiculaire* CD *et différentes obliques* CA, CB, CI, *à une droite* AB, *partent d'un même point* C *situé hors de cette droite,* 1° *les obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;* 2° *de deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en éloigne le plus est la plus longue.*

1° Soit DA = DB, je dis que CA = CB. Plions en effet la figure le long de CD : il est clair que le segment DA viendra tomber sur DB, puisque les angles CDA et CDB, étant égaux (35), sont superposables; et, comme DA = DB, le point A viendra se placer sur le point B; la droite CA, ayant ainsi ses deux extrémités confondues avec celles de CB, coïncidera avec elle dans toute son étendue : donc ces deux droites sont égales.

2° Supposons DI > DA, je dis que CI est > CA. Plions en effet la figure le long de AB et soient C′D, C′A et C′I, les rabattements respectifs de CD, CA et CI : CDC′ sera une ligne droite, et l'on aura C′A = CA, et C′I = CI. Mais la ligne brisée CIC′ est plus grande que la brisée CAC′ qu'elle enveloppe (51); donc CI, moitié de CIC′, est plus grande que CA, moitié de CAC′, Donc de deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en éloigne le plus est la plus longue.

56. Corollaire i. Réciproquement, *deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire,* sans quoi l'une serait plus longue que l'autre; et *de deux obliques inégales, la plus longue est la*

plus éloignée du pied de la perpendiculaire, sans quoi elle serait ou égale à l'autre ou moindre qu'elle.

57. Corollaire II. *D'un point donné on ne peut pas mener à une même ligne droite trois droites égales*. En effet, si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur cette droite, il pourra arriver trois cas : 1° ou la perpendiculaire coïncidera avec une des trois droites, et alors celle-ci sera plus petite que les deux autres ; 2° ou elle en laissera deux d'un même côté, et ces deux-là seront inégales ; 3° ou elle les laissera toutes les trois d'un même côté, et ainsi elles seront toutes les trois inégales.

Théorème X.

58. *Tout point* M *situé sur la perpendiculaire* CD *élevée sur une droite* AB *par son milieu* D, *est également distant des extrémités* A *et* B *de cette droite ; et tout point* E *situé hors de cette perpendiculaire est inégalement distant de ces mêmes extrémités*.

1° Puisque le point D est le milieu de AB, les obliques MA et MB s'écartent également du pied de la perpendiculaire MD : donc elles sont égales.

2° Tirons du point E les droites EA et EB aux points A et B, et soit M le point où la seconde coupe la perpendiculaire CD : ce point sera donc équidistant de A et de B ; de sorte que si l'on joint MB, on aura MA = MB. Or, la droite BE est plus courte que la ligne brisée EMB (7), et partant que son égale EMA : donc tout point situé hors de la perpendiculaire CD est inégalement distant des points A et B.

59. Corollaire I. Il suit de là que *la perpendiculaire elevée sur une droite par son milieu passe par tous les points équidistants des extrémités de cette droite* : car tous les points de cette perpendiculaire sont également éloignés des deux extrémités de la droite, et ces points sont les seuls du plan qui jouissent de cette propriété. En conséquence, on dit que *le* lieu géométrique *de tous les points équidistants de deux points*

donnés est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint ces deux points.

60. Corollaire ii. Il suit de ce corollaire et du principe du n° 9 que *si une droite* CC′ *passe par deux points* C et C′ *équidistants des extrémités* A et B *d'une autre droite* AB, *elle sera perpendiculaire sur le milieu de cette autre :* car, si par le milieu de AB on élève une perpendiculaire à cette droite, elle passera par tous les points équidistants de ses extrémités A et B, et par conséquent par les points C et C′ : donc elle aura deux points communs avec la droite CC′; donc elle coïncidera avec cette droite; donc CC′ est elle-même cette perpendiculaire élevée sur le milieu de AB.

§. III. *Des parallèles.*

Théorème XI.

Fig. 13. **61.** *Deux perpendiculaires* AB, CD *à une même droite* FG *ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les prolonge.*

Car si elles se rencontraient, on pourrait de leur point d'intersection abaisser deux perpendiculaires sur la même droite FG, ce qui est absurde (**50**). Deux pareilles droites sont dites *parallèles.*

62. *On appelle donc* parallèles *deux droites qui, situées sur un même plan, ne peuvent pas se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge :* ainsi deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

63. La théorie des parallèles repose sur la proposition suivante, qui est connue sous le nom de *Postulatum d'*Euclide et que nous admettrons comme une vérité évidente d'elle-même.

Fig. 14. *Une perpendiculaire quelconque* AB *à une droite* CD *est rencontrée par toute oblique* FG *à cette droite.*

Théorème XII.

Fig. 15. **64.** *Par un point donné* C *on peut mener une pa-*

rallèle à une droite donnée AB, *mais on ne peut lui en mener qu'une seule.*

En effet, abaissons du point C une perpendiculaire CD sur la droite AB. Cela posé, de toutes les droites que l'on peut mener par le point C, une seulement sera perpendiculaire à CD, et les autres lui seront obliques; la perpendiculaire à CD sera parallèle à AB (**61** et **62**), et les autres rencontreront cette droite (**63**) : donc par le point C on ne peut mener qu'une seule parallèle à AB.

Théorème XIII.

65. *Lorsque deux droites* AB, CD, *sont parallèles, toute perpendiculaire* FG *élevée sur l'une d'elles* AB *l'est aussi sur l'autre* CD. Fig. 13.

D'abord FG rencontrera CD, sans quoi elle lui serait parallèle, et l'on aurait ainsi par le point F deux parallèles FG et AB à CD, ce qui ne se peut (**64**). En second lieu, FG sera perpendiculaire à CD, sans quoi elle lui serait oblique, et réciproquement CD serait oblique à FG : donc alors CD irait rencontrer AB perpendiculaire à FG (**63**), ce qui est absurde, puisque AB et CD sont supposées parallèles : donc FG est perpendiculaire à CD.

Théorème XIV.

66. *Deux droites* AB *et* CD, *parallèles à une troisième* FG, *sont parallèles entre elles.* Fig. 16.

Car si l'on élève une perpendiculaire MN sur FG, elle le sera aussi sur ses parallèles AB et CD (**65**) : donc celles-ci seront ainsi perpendiculaires à une même droite MN, et par conséquent parallèles (**62**).

Théorème XV.

67. *Deux parallèles* AB *et* CD *sont partout équidistantes.* Fig. 17.

Il s'agit de prouver que deux points quelconques P et Q de l'une d'elles AB sont à la même distance de

l'autre. Abaissons donc des points P et Q des perpendiculaires PR et QS sur CD, et démontrons qu'elles sont égales (53). Pour cela, du point M, milieu de PQ, j'abaisse MN perpendiculaire sur CD; cette droite l'est aussi sur AB (65), et ainsi les angles en M sont droits : donc, si l'on replie la figure le long de MN, les droites MB et ND viendront se rabattre respectivement sur MA et sur NC, et par conséquent les points Q et S iront tomber sur ces droites; mais MQ=MP : donc le point Q se placera sur le point P. Or, les angles P et Q sont droits, comme les angles en M : donc, puisqu'ils ont déjà le côté commun PM, il faudra que QS prenne la direction de PR, et qu'ainsi le point S aille tomber sur cette droite. Mais il doit déjà se trouver sur NC : donc il se placera nécessairement au point R d'intersection de ces droites. QS a donc ses extrémités confondues avec celles de PR : donc ces deux droites coïncident dans toute leur étendue; donc elles sont égales, ce qui démontre notre théorème.

Fig. 18. **68.** Lorsque deux droites AB et CD sont coupées par une troisième FK, elles forment avec elle différents angles auxquels on a donné des noms particuliers.

On appelle ANGLES INTERNES *ou* EXTERNES *des angles dont l'ouverture est entre les droites* AB *et* CD, *ou hors de ces droites.* AGK est un angle interne; AGF est un angle externe.

Deux angles internes ou externes, situés de différents côtés de la sécante FK, *et dont les côtés sont dirigés en sens contraires, par rapport à la droite qui joint leurs sommets, se nomment angles alternes-internes ou alternes-externes.* AGK et FID sont deux angles alternes-internes. D'abord ce sont des angles internes; ensuite l'un est situé à gauche de la sécante FK, et l'autre l'est à sa droite; enfin les côtés GA et GK du premier sont évidemment dirigés en sens contraires des côtés ID et IF du second. FGB et CIK sont deux angles alternes-externes.

On appelle *angles correspondants deux angles situés d'un même côté de la sécante, et dont les côtés sont dirigés dans le même sens.* Tels sont les angles FGB et FID.

Théorème XVI.

69. *Lorsque deux parallèles* AB *et* CD *sont coupées par une sécante* FK,

1° *Les angles alternes-internes sont égaux ;*

2° *Les angles alternes-externes sont égaux ;*

3° *Les angles correspondants sont égaux ;*

4° *Les angles internes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires ;*

5° *Les angles externes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.*

1° et 2°. Par le milieu O de la portion de la sécante comprise entre les parallèles, menons MN parallèle à AB : elle le sera aussi à CD (**66**). Puis faisons tourner la partie FNK du plan autour du point O, jusqu'à ce que ON soit venue coïncider avec OM ; alors OK ira tomber sur OF à cause de l'égalité des angles NOK et FOM [**49**] ; et, comme OI = OG, les points I et G de la partie FNK du plan se trouveront respectivement en G et en I. Mais les droites GB et ID n'auront pas cessé d'être parallèles à ON : donc elles le seront actuellement à OM, et par conséquent coïncideront respectivement avec IC et GA, sans quoi, par un même point I ou G, on aurait deux parallèles à une même droite OM (**64**) : donc les angles BGK et DIF recouvriront leurs alternes-internes FIC et AGK ; et les angles BGF et DIK recouvriront aussi leurs alternes-externes CIK et FGA. Donc, 1° et 2° les angles alternes-internes ou alternes-externes sont égaux.

3° Je dis maintenant que les angles correspondants AGK et CIK, par exemple, sont égaux. En effet, l'angle CIK est égal à FID, son opposé par le sommet ; mais celui-ci est égal à son alterne-interne AGK ; donc les deux angles AGK et CIK, égaux à un troi-

sième FID, sont égaux. Donc, 3° les angles correspondants sont égaux.

4° Soient les deux angles internes d'un même côté AGK et CIF. L'angle CIF a pour supplément son adjacent FID (39) ; mais FID est égal à son alterne-interne AGK; donc CIF a aussi pour supplément AGK. Donc, 4° les angles internes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

5° Considérons enfin deux angles externes d'un même côté, AGF et CIK. Celui-ci a pour supplément son adjacent CIF, et par conséquent AGF, le correspondant de CIF. Donc, 5° les angles externes d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

Théorème XVII.

70. Réciproquement, *deux droites sont parallèles lorsqu'elles font avec une même sécante,*

1° *Des angles alternes-internes égaux;*

2° *Des angles alternes-externes égaux;*

3° *Des angles correspondants égaux;*

4° *Des angles internes d'un même côté qui sont supplémentaires;*

5° *Des angles externes d'un même côté qui sont supplémentaires.*

Supposons, par exemple, que les angles alternes-internes AGK et DIF soient égaux : je dis que les droites AB et CD sont parallèles. En effet, si CD n'est point parallèle à AB, nous pourrons toujours mener, par le point I, RS, parallèle à AB, et alors les angles alternes-internes AGK et SIF seront égaux; mais AGK est égal, par hypothèse, à DIF : donc les deux angles SIF et DIF, égaux à un troisième AGK, sont égaux entre eux, ce qui est absurde. Donc on ne peut pas supposer que CD ne soit pas parallèle à AB : donc ces deux droites sont parallèles.

On démontrerait de la même manière les autres cas, en suivant, comme nous venons de le faire, le précepte du n° 48.

Théorème XVIII.

71. *Deux angles sont égaux lorsqu'ils ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens ou en sens contraires.*

Soient d'abord les deux angles ABC, DFG, qui ont Fig. 19.
les côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Prolongeons DF jusqu'à sa rencontre avec CB au point I. Les deux angles ABC, DIC, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles AB et DI et à la sécante BC; mais DIC est aussi égal à DFG (**69**, 3°) : donc les deux angles ABC, DFG, égaux à un troisième DIC, sont égaux entre eux.

Considérons maintenant les deux angles ABC, OFK, qui ont les côtés parallèles et dirigés en sens contraires. Ces deux angles sont égaux; car OFK est égal à DFG, son opposé par le sommet, et nous venons de voir que celui-ci est égal à ABC.

Théorème XIX.

72. *Lorsque deux angles* ABC, DFO, *ont leurs côtés parallèles, et que deux de ces côtés* AB *et* DF *sont dirigés dans le même sens, et les deux autres* BC *et* FO *en sens contraires, ces angles sont supplémentaires.*

En effet, l'angle DFO est le supplément de son adjacent DFG, et DFG est égal à ABC.

73. Corollaire. *Deux angles qui ont les côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

Théorème XX.

74. *Deux angles* ABC, DFG, *qui ont leurs cô-* Fig. 20.
tés AB *et* DF, BC *et* FG, *perpendiculaires, sont égaux ou supplémentaires.*

Menons, par le point B, BI et BK, perpendiculaires respectivement à AB et à BC : les deux angles IBK et ABC sont évidemment égaux, car ils ont le même complément KBA (**46**). Mais les angles IBK et DFG

sont égaux ou supplémentaires, puisque leurs côtés sont parallèles (73) : donc aussi les angles ABC et DFG sont égaux ou supplémentaires.

CHAPITRE II.

DE LA CIRCONFÉRENCE.

§. I. *Propriétés générales de la circonférence.*

75. Nous avons vu au n° **21** ce qu'on entendait par les mots *circonférence, rayon, diamètre* et *arc.*

Nous appellerons CORDE *ou* SOUS-TENDANTE *d'un*
Fig. 21. *arc la droite qui unit ses extrémités.* AB est la corde de l'arc AMB.

THÉORÈME I.

76. *Deux circonférences décrites avec le même rayon sont égales.*

Car si l'on place le plan de la seconde circonférence sur celui de la première, de manière toutefois que les deux centres ne fassent qu'un seul point, les deux circonférences coïncideront, sans quoi tous leurs points ne seraient pas également éloignés du centre. *Les cercles de même rayon sont donc aussi égaux* (**21**).

THÉORÈME II.

77. *Le diamètre est la plus grande des cordes que l'on puisse tirer d'un point de la circonférence à un autre.*

Considérons, en effet, la corde AB et le diamètre AC issus du même point A de la circonférence, et joignons le point B avec le centre O. La corde AB est évidemment plus petite que la brisée AOB ; mais celle-ci est égale à AC, car l'une et l'autre sont la somme de deux rayons : donc la corde AB est plus courte que le diamètre AC.

Théorème III.

78. *Tout diamètre divise la circonférence en deux parties égales.*

Si l'on plie, en effet, la figure le long du diamètre AC, il faudra nécessairement que tous les points de l'arc ANC viennent se placer sur ceux de AMC, sans quoi tous les points de la circonférence ne seraient pas également éloignés du centre O, puisque dans le mouvement de l'arc ANC leur distance à ce centre n'a point pu varier.

Théorème IV.

79. *Trois points* A, B, C *qui ne sont pas en ligne droite déterminent une circonférence.* Fig. 22.

Il s'agit de démontrer que par ces trois points on peut faire passer une circonférence, mais qu'on ne peut en faire passer qu'une.

Pour le prouver, je joins AB et BC; puis j'élève sur ces droites, et par leurs milieux, les perpendiculaires respectives DE et FG, et je dis que ces perpendiculaires se rencontreront. En effet, si elles ne se rencontraient pas, elles seraient parallèles (62) : donc AB, qui est perpendiculaire sur DE, le serait aussi sur FG (65); mais déjà BC est perpendiculaire sur FG : donc il y aurait deux perpendiculaires AB et BC abaissées du même point B sur la même droite FG, ce qui est absurde (50), puisque les trois points A, B, C, n'étant pas en ligne droite, AB et BC sont deux droites distinctes. DE et FG se rencontreront donc en un certain point O. Or ce point, appartenant à la perpendiculaire DE, élevée sur le milieu de AB, est également éloigné de ses extrémités A et B (58); comme appartenant à FG, il est équidistant de B et de C : donc les trois distances OA, OB et OC sont égales; donc la circonférence décrite du point O comme centre avec le rayon OA, passera par les trois points A, B, C.

Remarquez que la perpendiculaire élevée au milieu de AC passerait par le point de section O des deux autres (**59**).

Concluons que l'on peut toujours décrire une circonférence par trois points qui ne sont pas situés en ligne droite. Je dis de plus qu'on ne peut en faire passer qu'une.

Supposons, en effet, qu'on puisse faire passer une seconde circonférence par les trois points A, B, C. Son centre sera nécessairement sur la perpendiculaire DE, sans quoi il ne serait pas également distant des points A et B (**58**). Par la même raison, il doit se trouver sur la perpendiculaire FG : donc il ne peut se trouver qu'à leur point de section O; donc la seconde circonférence a le même centre et le même rayon que la première; donc elle coïncide avec elle; donc il n'y a qu'une circonférence qui puisse passer par les trois points A, B, C; donc trois points qui ne sont pas en ligne droite déterminent une circonférence.

80. Scholie. Si les trois points A, B, C, étaient en ligne droite, les deux perpendiculaires DE et FG seraient parallèles (**61**), et ainsi elles ne se rencontreraient pas. Or nous avons prouvé tout à l'heure que le centre de la circonférence qui passerait par les trois points A, B, C, devait se trouver à la fois sur les deux perpendiculaires DE et FG : donc *il est impossible qu'une circonférence puisse être coupée en plus de deux points par une ligne droite;* et en effet, si la chose était possible, on n'aurait qu'à joindre trois de ces points avec le centre, et l'on aurait ainsi trois droites égales menées d'un même point à une même droite, ce qui est absurde (**57**).

Théorème V.

Fig. 23. **81**. *La perpendiculaire* OM, *abaissée du centre* O *d'une circonférence sur une corde quelconque* AB, *divise cette corde et les arcs sous-tendus, chacun en deux parties égales.*

Joignons en effet OA et OB : ces deux droites seront égales comme rayons, et partant obliques sur AB (**50** et **52**) : donc elles s'écartent également du pied I de la perpendiculaire OM (**55**) : donc ce pied est le milieu de AB.

Si maintenant on plie la figure le long du diamètre M′OM, les deux demi-circonférences se recouvriront; mais, à cause de l'égalité des angles OIB et OIA, le côté IB doit aller se placer sur le côté IA; et comme IB = IA, le point B tombera sur le point A : donc les arcs BM et AM se recouvriront, ainsi que les arcs BM′ et AM′; donc ces arcs sont égaux.

82. SCHOLIE. *La perpendiculaire abaissée du centre d'un cercle sur une corde satisfait donc aux cinq conditions suivantes : 1° passer par le centre; 2° être perpendiculaire à la corde; 3° passer par son milieu; 4° et 5° passer par les milieux des deux arcs soustendus par cette corde.* Or nous avons vu aux n°s 10 et 50 que deux quelconques de ces conditions suffisent pour déterminer une droite : donc *toute droite qui satisfera à ces deux conditions satisfera aussi aux trois autres.* Ainsi, par exemple, *la* PERPENDICULAIRE *élevée sur le* MILIEU *d'une corde passe par le* CENTRE *et par les* MILIEUX *des arcs sous-tendus par cette corde.*

83. *Une corde indéfiniment prolongée se nomme* SÉCANTE. Ainsi CABF est une sécante. Fig. 24.

Si l'on conçoit que la sécante CABF tourne autour de l'un des points où elle coupe la circonférence, autour de A, par exemple, son autre point d'intersection B finira par venir coïncider avec lui. On dira alors que la sécante CF est devenue *tangente*. Ainsi *la tangente à une circonférence en un point donné est la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante que l'on fait tourner autour de ce point, jusqu'à ce que le second point d'intersection vienne coïncider avec le premier.*

THÉORÈME VI.

84. *La tangente* TT′, *en un point quelconque* A *d'une circonférence, est perpendiculaire sur le rayon* OA *mené au point de contact.*

Tirons en effet par le point A une sécante quelconque CABF. Lorsque cette sécante tournera autour du point A, la droite OI, qui joint le centre avec le milieu de la corde interceptée par la circonférence, tournera aussi autour de ce centre, en restant toujours perpendiculaire à la sécante (82) : donc à la limite, c'est-à-dire quand la sécante sera devenue la tangente TT′, cette droite de jonction lui sera encore perpendiculaire ; mais alors le milieu de la corde sera le point A lui-même : donc, etc.

85. COROLLAIRE I. *La tangente n'a qu'un point de commun avec la circonférence ;* car tout point de cette droite, autre que le point de contact, est hors de cette courbe, puisque sa distance au centre est plus grande que le rayon (52).

86. COROLLAIRE II. *Toute droite* CAF, *autre que la tangente* TAT′, *menée par le point de contact* A *est une sécante :* en effet cette droite est oblique sur OA (36); donc si du centre on abaisse une perpendiculaire OI sur FC, cette perpendiculaire sera différente de OA; et par conséquent moindre qu'elle; donc le point I est intérieur à la circonférence.

THÉORÈME VII.

87. Réciproquement, *toute perpendiculaire* TAT′ *élevée à l'extrémité* A *d'un rayon* OA *est tangente à la circonférence.*

On démontrera facilement cette réciproque en appliquant la règle du nº 48.

88. COROLLAIRE. *Toute droite qui n'a qu'un point de commun avec une circonférence lui est tangente.* En effet, la droite qui joindra ce point au centre sera la plus courte que l'on puisse mener de ce centre à la

droite dont il s'agit; donc elle lui est perpendiculaire (**54**); donc cette droite est une tangente.

THÉORÈME VIII.

89. *Deux parallèles interceptent, sur la circonférence, des arcs égaux.* Fig. 25.

Trois cas peuvent se présenter, selon que les parallèles seront toutes deux sécantes; l'une sécante et l'autre tangente, ou toutes deux tangentes.

1° Soient les deux sécantes parallèles AB et CD, je dis que les arcs AC et DB sont égaux. J'abaisse, en effet, du centre O la perpendiculaire OI sur AB: elle le sera aussi sur sa parallèle CD, et par conséquent le point I sera le milieu des arcs AIB et CID (**81**). Ainsi $AI = IB$ et $CI = ID$: donc l'arc AC, différence des arcs AI et IC, est égal à l'arc DB, différence des arcs IB et ID qui sont respectivement égaux aux deux précédents.

2° Soient la sécante AB et la tangente TT′, je joins le centre O et le point I de contact. La droite OI sera ainsi perpendiculaire sur TT′ (**84**), et par conséquent sur sa parallèle AB: donc le point I est le milieu de l'arc AIB; donc les arcs AI et IB, interceptés entre la corde AB et la tangente TT′, sont égaux.

3° Soient les deux tangentes parallèles TT′ et SS′. Si l'on mène un diamètre au point I, il sera perpendiculaire à TT′ et par conséquent à sa parallèle SS′; donc il ira passer par le point K, où cette seconde tangente rencontre la circonférence (**50**); donc $IAK = IBK$.

90. SCHOLIE. La réciproque se démontrerait facilement par la règle du n° **48** ou directement; mais pour qu'elle soit vraie dans le cas de deux cordes, il faut que ces cordes ne se coupent pas dans la circonférence.

Théorème IX.

Fig. 26. **91.** *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, 1° deux arcs égaux* AMB, CND *sont sous-tendus par des cordes égales* AB, CD; 2° *de deux arcs inégaux* AMB, CNF, *le plus grand*, CNF, *est sous-tendu par la plus grande corde* CF. (Quand nous parlerons de l'arc sous-tendu par une corde, il s'agira toujours du plus petit des deux qu'elle sous-tend.)

1° Supposons que les deux arcs égaux AMB, CND appartiennent à la même circonférence; prenons le milieu L de l'arc AC, et tirons le diamètre LOQ. Si maintenant nous faisons tourner la demi-circonférence LNQ autour de LQ jusqu'à ce qu'elle vienne se rabattre sur LMQ, il est clair que ces deux demi-circonférences coïncideront parfaitement, sans quoi il y aurait des points inégalement éloignés du centre : donc le point C viendra se rabattre sur A; et, comme l'arc CND est égal à l'arc AMB, le point D ira de même se placer sur B. Les deux cordes CD et AB auront donc leurs extrémités confondues : donc elles coïncideront dans toute leur étendue; donc elles sont égales.

Fig. 27. 2° Supposons que les arcs AMB, CNF appartiennent à deux circonférences égales. Tirons les diamètres AG et CK, et portons la seconde circonférence sur la première, en faisant coïncider ces diamètres : elles coïncideront elles-mêmes; et, comme $CNF > AMB$, le point F ira se placer en F′ entre B et G, et la corde CF aura pris la position AF′. Joignons OF′ et OB : ce dernier rayon coupera AF′ entre A et F′ (c'est là ce qui exprime que $CNF > AMB$). Or, les droites AB et OF′ sont plus petites que les brisées respectives $AI+IB$ et $OI+IF'$: donc

$$AB < AI + IB,$$
$$OF' < OI + IF';$$

donc leur somme est aussi plus petite que celle de ces brisées; ainsi

$$AB+OF'<AI+IB+OI+IF';$$

mais $IB+OI=OB$, et $AI+IF'=AF'$: donc

$$AB+OF'<OB+AF'.$$

Retranchant d'une part OF', et de l'autre son égal OB, il restera $AB<AF'$ ou que CF, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME X.

92. Réciproquement *dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux cordes égales* AB *et* CD *soustendent des arcs égaux* AMB *et* CND, *et de deux cordes inégales* AB *et* CF, *la plus grande* CF *soustend le plus grand arc.* Fig. 26.

1° En effet, si l'arc AMB n'était pas égal à l'arc CND, le plus grand des deux serait sous-tendu par la plus grande corde, et ainsi AB ne serait pas égal à CD.

2° Si l'arc CNF n'est pas plus grand que AMB, il lui sera égal ou il sera plus petit que lui; mais, dans le premier cas, la corde CF serait égale à AB, et, dans le second, elle serait plus petite qu'elle, résultats contraires à l'hypothèse. Donc l'arc $CNF>AMB$.

93. SCHOLIE. En généralisant la méthode de démonstration que nous venons d'employer tout à l'heure (**92**), nous établirons la règle suivante, qui trouvera quelquefois son application dans la démonstration des réciproques.

Supposez faux le principe que vous voulez établir, et faites successivement toutes les hypothèses qui lui sont contradictoires. Examinez les conséquences qui en résultent, d'après les théorèmes précédents; et si ces conséquences ne peuvent s'accorder avec l'hypothèse sur laquelle est établie votre réciproque, vous conclurez que cette réciproque est vraie.

Nous avons déjà fait usage de ce moyen de démonstration au n° **56**.

Théorème XI.

94. *Dans le même cercle ou dans des cercles*
Fig. 26. *égaux, deux cordes égales* AB, CD *sont également éloignées du centre; et de deux cordes inégales* AB, CF, *la plus grande* CF *est la plus près du centre.*

Nous supposerons que les cordes soient tracées dans la même circonférence. Abaissons du centre O les perpendiculaires OG, OI, OK sur les cordes respectives AB, CD et CF, et il s'agira de prouver que $OG = OI$, et que $OK < OG$ (**53**).

1° Employez le même tour de démonstration que dans le premier paragraphe du n° **91**, et vous conclurez la coïncidence des deux perpendiculaires OG et OI du théorème du n° **50**.

2° Puisque la corde CF est plus grande que AB, l'arc CNF est plus grand que AMB, et ainsi l'on pourra prendre sur cet arc une *partie* CND égale à AMB. Joignez CD, et abaissez sur cette corde la perpendiculaire OI, qui coupe CF en H : on a évidemment $OK < OH$. Mais, comme le point I est au-dessus du point H, sans quoi la corde CD ne pourrait aller se terminer en D qu'en coupant CF en un autre point que C, on a aussi $OH < OI$: donc à plus forte raison OK est-il plus petit que OI. Mais $OI = OG$, puisque les cordes AB et CD sont égales : donc enfin $OK < OG$.

Théorème XII.

95. Réciproquement, *dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux cordes également éloignées du centre sont égales, et de deux cordes inégalement éloignées du centre, celle qui en est la plus près est la plus grande.*

Appliquez la règle du n° **93**.

§. II. *Des circonférences tangentes et sécantes.*

96. Nous avons vu que trois points qui ne sont pas situés en ligne droite déterminaient une circonférence:

d'où il suit que deux circonférences ont au plus deux points communs. *Deux circonférences qui se rencontrent en deux points sont dites sécantes. Elles sont* TANGENTES *si elles n'ont qu'un point commun.*

Théorème XIII.

97. *Lorsque deux circonférences se coupent, la droite qui joint leurs centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.*

En effet, si l'on élève une perpendiculaire sur le milieu de cette corde AB, elle ira passer par les deux centres O et O′ (82) : donc elle aura deux points communs avec la droite OO′, et coïncidera par conséquent avec elle ; donc OO′ est elle-même cette perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. Fig. 28.

Théorème XIV.

98. *Lorsque deux circonférences sont tangentes, le point de contact est sur la droite qui joint les centres.*

Considérons en effet deux circonférences O et O′ qui se coupent aux points A et B, et supposons que la seconde tourne autour du point fixe A : il arrivera un instant où le second point d'intersection B se sera réuni au premier, et alors les deux circonférences seront devenues tangentes. Or la droite qui joint les centres n'aura pas cessé d'être perpendiculaire sur le milieu de la corde commune ; et, comme cette corde est alors réduite au point A, ce point doit se trouver sur la ligne des centres. Donc, etc. [1]. Fig. 28 et 29.

---

[1] Si l'on veut démontrer ce théorème *à priori*, on dira : Supposons que le point de contact soit en M, hors de la droite OO′ qui joint les centres O et O′. Abaissons MA, perpendiculaire sur OO′, et prolongeons-la d'une quantité AM′ = AM. Il est clair que de cette manière la droite OO′ est perpendiculaire sur le milieu de MM′, et qu'ainsi les centres O et O′ sont chacun également éloignés de ses extrémités M et M′ : donc les deux circonférences passeront aussi par le point M′ ; donc elles au- Fig. 30.

99. Scholie. Le théorème précédent peut s'énoncer de la manière suivante :

Lorsque deux circonférences sont tangentes extérieurement ou intérieurement, la distance des centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons.

Fig. 29. En effet, le point de contact A, devant se trouver sur la droite qui joint les centres (98), sera situé entre les deux centres, ou les laissera tous deux d'un même côté; mais alors il est évident que, dans le premier cas, leur distance O O' est égale à la somme O A + O'A des deux rayons, et que dans le second elle est égale à leur différence O A — O'A.

Théorème XV.

100. Réciproquement, *deux circonférences sont tangentes lorsqu'elles ont un point commun* A *sur la droite qui joint les centres.*

Nous considérerons deux cas, selon que le point commun A sera entre les deux centres O et O', ou sur le prolongement de la droite qui les unit.

1° Joignons les deux centres O et O' avec un point quelconque M de la circonférence O' : nous formerons ainsi la brisée O M O', qui sera plus grande que la droite O A O'. Retranchons d'une part M O' et de l'autre son égale O'A : il restera O M > O A : donc tous les points de la circonférence O' sont, à l'exception de A, extérieurs à la circonférence O, donc ces deux circonférences se touchent *extérieurement* en A.

2° Joignons encore les centres O et O' avec un point quelconque M de la circonférence O'. La droite O M est plus courte que la brisée O O'M, ou que son égale O A : ainsi tous les points de la circonférence O' sont intérieurs à la circonférence O; donc ces deux circonférences se touchent *intérieurement* en A.

---

ront deux points communs, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc le point de contact M ne peut pas être hors de la droite OO'.

On pourrait encore démontrer cette réciproque par la réduction à l'absurde (93), et en s'appuyant sur le théorème du n° **97**.

101. SCHOLIE. Cette réciproque peut s'énoncer comme il suit :

Deux circonférences sont tangentes extérieurement ou intérieurement lorsque la distance de leurs centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons.

1° Supposons que la distance OO′ des centres soit égale à la somme des rayons; soit OA l'un des rayons, l'autre sera nécessairement O′A : donc les deux circonférences passeront par le point A de la droite OO′; donc elles seront tangentes (**100**). Fig. 29.

2° Supposons que la distance OO′ des centres soit égale à la différence des rayons, le plus grand se composera alors du plus petit et de cette distance : donc si OA est ce plus grand rayon, le plus petit sera nécessairement O′A; donc les deux circonférences passeront alors par le point A de la droite OO′; donc elles seront tangentes (**100**).

102. COROLLAIRE. Il suit de cette proposition et de la précédente (**98** et **100**) que *la droite indéfinie* OA *est le lieu géométrique des centres de toutes les circonférences tangentes à la circonférence* O *au point* A; et si par le point A on mène une perpendiculaire TT′ à OA, cette droite sera une tangente commune à toutes ces circonférences. Or, chacune de ces circonférences enveloppe toutes celles dont les centres sont compris entre le sien et le point A : donc ces circonférences s'approchent d'autant plus de cette tangente que leurs rayons sont plus grands; de sorte qu'*on peut regarder la tangente* TT′ comme leur limite, c'est-à-dire *comme une circonférence dont le rayon est infini.*

THÉORÈME XVI.

103. *Pour que deux circonférences se coupent,*

il faut et il suffit que la distance de leurs centres soit plus petite que la somme de leurs rayons, et plus grande que leur différence.

Prouvons d'abord que ces deux conditions sont nécessaires, et nous ferons voir ensuite qu'elles sont suffisantes.

Fig. 28. 1° Soient O et O′ les centres de deux circonférences qui se coupent : la droite OO′ sera perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint leurs points d'intersection A et B, de sorte que ces points seront situés de part et d'autre de cette droite; si donc on tire OA et O′A, on aura

$$OO' < OA + O'A \text{ et } OA < OO' + O'A, \text{ d'où}$$

$OO' > OA - O'A$, en supposant $OA > O'A$. Donc, *quand deux cercles se coupent, la distance des centres est plus petite que la somme de leurs rayons et plus grande que leur différence.* Ces deux conditions sont donc *nécessaires* pour qu'il y ait intersection.

2° Elles sont *suffisantes.* Nous le démontrerons en prouvant que les deux circonférences ne peuvent être ni *extérieures*, ni *tangentes*, ni *intérieures* l'une à l'autre.

Fig. 31. *Si elles étaient extérieures*, la droite qui irait du centre O au centre O′, rencontrerait d'abord la première circonférence en A, pour en sortir et rencontrer ensuite la deuxième circonférence en A′; donc on aurait

$$OO' = OA + AA' + A'O',$$

de sorte que *la distance des centres serait plus grande que la somme des rayons*, et nous la supposons plus petite.

Si les deux circonférences étaient tangentes, la distance des centres serait égale à la somme ou à la différence de leurs rayons (**101**), et nous supposons qu'il n'en est pas ainsi.

Fig. 32. *Si les deux circonférences étaient intérieures l'une à l'autre*, la droite qui irait du centre O au centre O′ rencontrerait d'abord la seconde circonférence en A′,

pour en sortir et rencontrer ensuite la première circonférence en A, donc on aurait

$$OA = OO' + O'A' + A'A,$$

donc le plus grand rayon surpasserait la somme faite du plus petit rayon et de la distance des centres, ou, ce qui revient au même, *la distance des centres serait moindre que la différence des rayons*, et nous supposons le contraire. Donc les deux circonférences ne peuvent être ni extérieures, ni tangentes, ni intérieures l'une à l'autre; donc elles se coupent.

104. Scholie i. *Si l'on ignore lequel des deux rayons est le plus grand, il faudra vérifier que chaque rayon est plus petit que la somme faite de l'autre rayon et de la distance des centres*, pour être sûr que la seconde condition est satisfaite.

§. III. *De la mesure des angles.*

Théorème XVII.

105. *Dans la même circonférence ou dans des circonférences égales, les angles au centre (on appelle ainsi ceux qui ont leur sommet au centre)* AOB *et* COD, *qui comprennent des arcs égaux* AB *et* CD *entre leurs côtés, sont égaux.* Fig. 33.

Par le milieu I de l'arc AC menez le diamètre IK, et pliez ensuite la figure le long de ce diamètre : il est clair que de cette manière le point A viendra se placer en C, et le point B en D, puisque nous supposons l'arc AB = CD. L'angle AOB recouvrira donc exactement l'angle COD, et par conséquent ces angles sont égaux (**34**).

Théorème XVIII.

106. Réciproquement, *dans la même circonférence ou dans des circonférences égales, si deux angles au centre* AOB *et* COD *sont égaux, les arcs* AB *et* CD *compris entre leurs côtés sont aussi égaux.*

On démontrera cette réciproque d'après la règle du n° **48**, ou bien on pourra imiter la démonstration de la proposition directe.

Fig. 34. **107**. COROLLAIRE. *Un angle droit dont le sommet est au centre intercepte entre ses côtés un quart de la circonférence ou un* QUADRAN. Réciproquement, *si un angle au centre* AOB *comprend un quadran entre ses côtés, cet angle sera droit* : car si l'on prolonge le côté AO, on formera un angle BOC=AOB, puisque BC sera nécessairement un quadran; donc ces deux angles sont droits.

THÉORÈME XIX.

Fig. 35. **108**. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, deux angles au centre* AOB, DCF, *sont proportionnels aux arcs* AB, DF, *compris entre leurs côtés,* c'est-à-dire que l'on aura la proportion

AOB : DCF :: AB : DF.

Il peut se présenter deux cas, suivant que les arcs AB et DF seront commensurables ou qu'ils ne le seront pas.

1° *Supposons que les arcs* AB *et* DF *soient commensurables,* et que leur commune mesure soit contenue 8 fois dans AB et 3 fois dans DF : le rapport de ces deux arcs sera donc $\frac{8}{3}$. Si l'on joint tous leurs points de division aux centres O et C, on aura partagé les angles AOB et DCF, respectivement, en 8 et en 3 parties égales, et comme les parties du premier sont égales à celles du second (**105**), car il en est ainsi des subdivisions des arcs AB et DF, on voit que le rapport de AOB à DCF est aussi $\frac{8}{3}$; donc

AOB : DCF :: AB : DF.

Fig. 36. 2° *Supposons que les arcs* AB *et* DF *soient incommensurables.* Je partage l'arc DF en un nombre quelconque de parties égales, et je porte l'une de ces parties sur AB autant de fois qu'elle pourra y être

contenue : soit BG, le reste, que je trouverai ainsi. Je joins OG; et comme les arcs AG et DF sont commensurables, on aura

$$\frac{AOG}{DCF}=\frac{AG}{DF},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{AOB-BOG}{DCF}=\frac{AB-BG}{DF}.$$

Or BG et BOG sont deux quantités variables qui tendent vers zéro à mesure que le nombre des parties dans lesquelles on divise l'arc DF est plus grand; donc les rapports variables $\frac{AOB-BOG}{DCF}$ et $\frac{AB-BG}{DF}$ tendent respectivement vers les limites $\frac{AOB}{DCF}$ et $\frac{AB}{DF}$; mais ces rapports variables sont constamment égaux; donc leurs limites sont égales (Arith. 210); donc

$$\frac{AOB}{DCF}=\frac{AB}{DF} \text{ ou } AOB : DCF :: AB : DF,$$

ce qu'il fallait démontrer ([1]).

([1]) On peut remplacer cette démonstration par la suivante, due à *Ampère*, et qui nous paraît plus simple. Fig. 37.

Portons l'arc DF sur l'arc AB autant de fois que la chose sera possible, nous trouverons qu'il y est contenu *deux* fois avec le reste IB : de sorte que

$$AB=2DF+IB.$$

Mais si nous joignons les points de division G et I avec le centre, nous formerons les deux angles AOG et GOI, égaux à DCF (105); de sorte que

$$AOB=2DCF+IOB;$$

Ainsi l'angle AOB contient l'angle DCF autant de fois que l'arc AB contient l'arc DF, et l'angle restant IOB correspond à l'arc restant IB : par conséquent, si l'on porte à son tour IB sur DF, et que l'on joigne les points de division avec le centre C, on verra de même que l'angle DCF contiendra IOB autant de fois que DF contient IB, et que l'angle restant KCF, correspondra à l'arc restant KF, et ainsi de suite, si l'on continue d'effectuer sur les arcs AB et DF et sur les angles AOB et

Théorème XX.

109. *Un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre.*

Mesurer un angle, c'est chercher le rapport de cet
Fig. 38. angle à un autre angle pris pour unité. Si donc A est l'angle à mesurer, et D l'unité angulaire, la mesure de l'angle A sera le rapport de A à D. Mais nous venons de voir que deux angles sont proportionnels aux arcs compris entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centres, avec des rayons égaux : donc, si des points A et D comme centres, et avec la même ouverture de compas, nous décrivons les arcs B et C, le rapport $\frac{A}{D}$ sera le même que celui $\frac{B}{C}$, et par conséquent ce dernier sera la mesure de l'angle A. Or, *si l'on convient* de prendre l'arc C pour unité d'arc, le rapport $\frac{B}{C}$ sera la mesure de l'arc B : donc la mesure de l'arc B sera aussi celle de l'angle A, ce qu'on énonce en disant qu'*un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.*

110. Scholie. Remarquons toutefois qu'il ne faut pas prendre à la lettre cette manière de s'énoncer : car elle est tout à fait inexacte, attendu que l'on ne peut comparer entre elles que des quantités homogènes, tandis qu'un angle et un arc sont des quantités d'espèces essentiellement différentes; mais quand on dit

---

D C F les opérations nécessaires pour trouver la commune mesure des deux premières quantités et celle des deux autres. Les deux séries de quotients que l'on trouvera ainsi seront donc les mêmes. Par conséquent, si on développe en fraction continue le rapport des deux arcs A B et D F et celui des deux angles A O B et D C F, on trouvera la même expression (30); donc ces deux rapports sont égaux ; donc on a la proportion

A O B : D C F :: A B : D F,

ce qu'il fallait démontrer.

qu'un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre, on doit entendre que *le nombre abstrait qui exprime la mesure de l'angle est celui même qui exprime la mesure de l'arc compris entre ses côtés, en prenant pour unite d'arc l'arc décrit avec le même rayon entre les côtés de l'unité angulaire.*

111. On prend ordinairement l'angle droit pour unité angulaire, et par conséquent le quadran pour unité d'arc : d'où l'on voit que, *pour avoir alors la mesure d'un angle, il faudra chercher le rapport de l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre au quadran de la circonférence dont il fait partie,* ce qui ne saurait présenter de difficulté, puisqu'il suffira d'appliquer à ces deux arcs la méthode du n° **24** et le calcul du n° **25**.

112. Pour faciliter, dans la pratique des arts, l'évaluation du rapport d'un arc donné au quadran de la circonférence à laquelle il appartient, on est convenu de partager la circonférence en 400 parties égales que l'on nomme *grades* et que l'on désigne par la lettre ^{g}; de sorte que le quadran (^{q}) contient 100^g. On a ensuite subdivisé le grade en cent parties égales appelées *minutes* ($'$), et la minute en cent parties égales nommées *secondes* ($''$). Il suit de là que le grade est la *centième* partie du quadran ; que la minute est la *centième* partie du grade, et par conséquent la *dix millième* partie du quadran ; enfin, que la seconde est la centième partie de la minute, et partant la *millionième* partie du quadran ; de sorte qu'un nombre quelconque de grades, de minutes et de secondes peut toujours s'exprimer en fraction décimale du quadran. Par exemple, un arc de $145^g\,82'\,36''$ équivaut à $1^q{,}458236$: car $100^g = 1^q$; 45^g sont les 45 centièmes du quadran ; $82' = 0^q{,}0082$ et $36'' = 0^q{,}000036$. Donc un angle qui comprend entre ses côtés un arc de $145^g\,82'\,36''$ vaut $1^D{,}458236$, c'est-à-dire un angle droit, plus les quatre cent cinquante-huit mille deux cent trente-six millio-

nièmes d'un droit. Donc, *pour obtenir la mesure d'un angle, il suffira d'évaluer l'arc compris entre ses côtés en fraction décimale du quadran, et cette fraction, considérée comme exprimant des parties de l'angle droit, sera la mesure demandée.*

113. Avant l'établissement du *système métrique décimal,* on partageait la circonférence en 360 parties égales nommées degrés (°), de sorte que le quadran contenait 90°; le degré se subdivisait en 60 minutes, et la minute en 60 secondes. Pour avoir, dans ce système, la mesure d'un angle, il faut donc prendre le rapport du nombre de degrés et de parties de degré contenus dans l'arc correspondant à 90°. Pour cela, on convertit cet arc, ainsi que 90°, en unités de la plus basse espèce de celles qu'il contient, et l'on prend le rapport des deux *nombres abstraits* ainsi trouvés. Par exemple, si l'angle à mesurer intercepte entre ses côtés un arc de 36° 54′ 45″, on réduira cet arc en secondes, ce qui donnera 132885″, on verra de même que 90° = 324000″, de sorte que l'angle donné est les $\frac{132885}{324000} = \frac{2953}{7200}$ de l'angle droit.

Cette division de la circonférence en 360 parties égales présente des avantages qui la font encore préférer à la nouvelle dans bien des circonstances. Le principal tient à la propriété qu'a le nombre 360 d'avoir beaucoup de diviseurs : ainsi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, etc., de la circonférence, valent respectivement 180°, 120°, 90°, 72°, 60°, 40°, 36°, 30°, 24°, etc.

114. Mais comment évaluer le nombre des parties du quadran contenues dans un arc donné? On y parvient au moyen du *rapporteur.* C'est un demi-cercle en cuivre ou en corne, dont la circonférence est divisée en grades ou en degrés, et quelquefois en demi-grades ou en demi-degrés. Si l'instrument est en cui-
Fig. 39. vre, la partie A′B′C′ est évidée, et le centre est indiqué par un très-petit cran O. Deux autres entailles A′ et C′ laissent voir les deux points A′ et C′ du diamètre AOC. Le rapporteur en corne n'a pas besoin de ces

entailles à cause de sa transparence; seulement il est percé à son centre d'un très-petit trou.

Si maintenant on veut savoir combien un arc MN Fig. 40. vaut de *degrés*, par exemple, on mènera de son centre O à ses extrémités deux droites indéfinies, puis on placera le diamètre AC d'un rapporteur divisé en 180° sur le côté OM, de manière que son centre coïncide exactement avec celui de l'arc MN, et l'on verra par quelle division passe l'autre côté ON; le numéro de cette division indiquera le nombre de degrés de l'arc MN : car tous les arcs compris entre les côtés de l'angle NOM doivent être du même nombre de degrés, puisque le rapport de chacun d'eux au quadran de la circonférence à laquelle il appartient, étant la mesure de cet angle (**109**), doit être une quantité constante.

Si le côté ON passait entre deux traits consécutifs de la division du limbe, on verrait duquel il se rapproche le plus; ce serait alors le numéro de ce trait que l'on prendrait pour l'indication du nombre de degrés de l'arc, et *l'on aurait ainsi la valeur de cet arc à moins d'un demi-degré près*.

Théorème XXI.

115. *Tout angle* INSCRIT (*on appelle ainsi celui qui est formé par deux cordes qui se coupent sur la circonférence*) *a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés*.

Nous distinguerons trois cas, selon que le centre sera sur un des côtés de l'angle, qu'il sera intérieur ou extérieur à l'angle.

1° Soit l'angle BAC, dont le côté AC passe par le Fig. 41. centre O. Si nous menons le diamètre IK parallèle à AB, nous formerons l'angle IOC égal à BAC son correspondant, par rapport aux parallèles AB et IO et à la sécante AC; or l'angle au centre IOC a pour mesure l'arc IC compris entre ses côtés : donc l'angle BAC a aussi pour mesure cet arc IC. Mais l'arc IC est égal à

AK; car ils correspondent aux angles égaux IOC et AOK (**49** et **106**); d'un autre côté l'arc AK est égal à BI, puisqu'ils sont compris entre les cordes parallèles AB et IK (**89**) : donc les deux arcs IC et BI, égaux à un troisième AK, sont égaux; donc IC est la moitié de l'arc BC; donc enfin l'angle BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés.

2° Considérons l'angle BAD qui comprend le centre entre ses côtés. Si nous menons le diamètre AC, nous le décomposerons dans les deux angles BAC et CAD, de sorte qu'il aura pour mesure la somme des mesures de ces angles. Mais, d'après ce que nous venons de voir, les angles BAC et CAD ont respectivement pour mesures la moitié de BC et la moitié de CD : donc l'angle BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$CD, c'est-à-dire la moitié de BCD.

3° Soit enfin l'angle FAB auquel le centre est extérieur. Je tire encore le diamètre AC, et je forme ainsi les deux angles FAC et BAC, dont la différence est précisément l'angle proposé FAB : donc sa mesure sera la différence de leurs mesures. Or les angles FAC et BAC, dont un des côtés passe par le centre, ont respectivement pour mesures la moitié de FC et la moitié de BC : donc l'angle FAB a pour mesure $\frac{1}{2}$FC — $\frac{1}{2}$BC, c'est-à-dire la moitié de FB.

Fig. 42. **116.** Corollaire I. *Tous les angles* ABC, ADC, AFC, *inscrits dans un même arc* ABC, c'est-à-dire qui ont leurs sommets placés sur cet arc, et dont les côtés passent par ses extrémités A et C, *sont égaux,* puisqu'ils ont pour mesure la moitié du même arc AMC, compris entre leurs côtés.

Fig. 43. **117.** Corollaire II. *Tout angle* DOF *inscrit dans une demi-circonférence est un angle droit :* car il a pour mesure la moitié de l'arc DMF compris entre ses côtés, c'est-à-dire un quadran (**107**).

Théorème XXII.

118. *L'angle* BAT *formé par une corde et la tangente à l'une de ses extrémités a pour mesure la moitié de l'arc* BMA *compris entre ses côtés.* Fig. 41.

Si l'on conçoit en effet que la corde AD, supposée prolongée indéfiniment, tourne autour du point A, de manière qu'elle tende à sortir de la circonférence, le point D se rapprochera sans cesse de A, et l'angle BAD ne cessera pas d'avoir pour mesure la moitié de l'arc BCD compris entre ses côtés : donc à la limite, c'est-à-dire quand le point D sera venu se réunir au point A, ou, en d'autres termes, quand la sécante AD sera devenue la tangente AT, l'angle correspondant BAT aura encore pour mesure la moitié de l'arc BMA compris entre ses côtés [1].

Théorème XXIII.

119. *L'angle* D'AB, *formé par une corde* AB *et par le prolongement d'une autre* AF, *a pour mesure la demi-somme des arcs* FNA *et* AMB, *sous-tendus par ces cordes.*

En effet la somme des angles adjacents BAD' et FAB vaut deux droits : donc la somme de leurs mesures est une demi-circonférence; or l'angle inscrit FAB a pour mesure la moitié de l'arc FB compris entre ses côtés; donc, en retranchant cette moitié d'une demi-circonférence, on aura la mesure de l'angle BAD'. Mais re-

---

[1] On peut démontrer ce théorème directement de la manière suivante : Par le point de contact A menons le diamètre AC, nous décomposerons ainsi l'angle BAT dans les deux angles BAC et CAT : donc il aura pour mesure la somme de leurs mesures. Or l'angle CAT, qui est droit (84), a pour mesure un quadran (109), c'est-à-dire la moitié de la demi-circonférence AMC; l'angle inscrit BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés : donc l'angle BAT a pour mesure $\frac{1}{2}$AMC + $\frac{1}{2}$BC, c'est-à-dire la moitié de l'arc AMB intercepté par ses côtés.

trancher $\frac{1}{2}$ FB d'une demi-circonférence, revient évidemment à retrancher FB de la circonférence entière, et à prendre la moitié du reste FNAMB, donc enfin l'angle BAD′ a pour mesure $\frac{1}{2}$FNAMB, c'est-à-dire la demi-somme des deux arcs FNA et AMB (¹).

Théorème XXIV.

Fig. 44. **120.** *L'angle* ABC, *dont le sommet est placé entre le centre et la circonférence, a pour mesure la demi-somme des arcs* AC *et* DF *compris entre ses côtés et leurs prolongements.*

Si nous menons par le point F la parallèle FI au côté BC, nous formerons l'angle inscrit AFI, égal à l'angle ABC : donc l'angle ABC aura pour mesure la moitié de ACI (115), c'est-à-dire la moitié de AC plus la moitié de CI. Mais l'arc CI = DF (89) : donc

---

(¹) Ce théorème est, ainsi que le précédent, un cas particulier de celui du nº 115. Pour le faire voir, nous admettrons une convention que l'on fait dans l'application de l'algèbre à la géométrie, savoir, que quand deux distances sont comptées dans des sens directement contraires, on indique cette opposition de direction en les affectant l'une du signe *plus* et l'autre du signe *moins*.

Cela posé, la proposition du nº 115 revient à dire qu'*un angle inscrit a pour mesure la demi-différence des arcs sous-tendus par ses côtés, en comptant ces deux arcs dans le même sens*. Ainsi l'angle BAD a pour mesure $\frac{AMB - AMD}{2}$, et cette mesure restera la même lorsque le côté AD tournera autour du sommet A : donc, quand AD sera devenue la tangente AT, l'angle BAT aura pour mesure $\frac{AMB}{2}$: car alors l'arc AMD sera nul. Si AD continue de tourner, son prolongement rentrera dans la circonférence, et l'arc sous-tendu ANF, étant compté en sens contraire de AMB, sera *négatif;* mais pour avoir la mesure de D′AB, il faut retrancher la moitié de cet arc ANF de celle de AMB : donc cet angle aura pour mesure $\frac{AMB}{2} + \frac{ANF}{2} = \frac{FNAMB}{2}$: car, pour soustraire une quantité d'une autre, il faut l'écrire à la suite de cette autre avec un signe contraire au sien.

enfin l'angle ABC a pour mesure la moitié de AC plus la moitié de DF, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème XXV.

121. *L'angle* ABC, *dont le sommet est situé hors de la circonférence, a pour mesure la demi-différence des arcs concave et convexe* AC *et* DF *compris entre ses côtés.* Fig. 45.

Menons par le point F la parallèle FI au côté BC, et nous formerons l'angle inscrit AFI, égal à ABC : donc cet angle ABC aura pour mesure la moitié de l'arc AI compris entre les côtés de AFI, ou, ce qui revient au même, la demi-différence des arcs AC et CI. Mais CI = DF : donc l'angle ABC a pour mesure la demi-différence des arcs AC et DF, ce qu'il fallait démontrer.

122. Nous avons vu qu'un angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés. On peut se demander si la réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire *si de ce qu'un angle a pour mesure l'arc concave* AMC *compris entre ses côtés, on doit conclure que cet angle ait son sommet au centre.* Fig. 46.

Le principe que nous avons posé au nº **93** va nous conduire à la solution de cette question. En effet, si l'angle dont il s'agit n'a pas son sommet au centre, il l'aura nécessairement ou hors de la circonférence, ou sur la circonférence, ou entre cette courbe et le centre. Dans le premier cas sa mesure sera moindre que la moitié de AMC (**121**), et dans le second elle sera précisément la moitié de AMC (**115**) : donc les deux premières hypothèses ne peuvent avoir lieu. Actuellement si le sommet de l'angle est placé entre le centre et la circonférence, cet angle aura pour mesure la moitié de l'arc AMC compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc compris entre leurs prolongements (**120**): donc pour qu'il ait pour mesure l'arc AMC, il suffira que l'arc compris entre les prolongements de ces côtés soit égal à AMC, donc si l'on prend un arc *quelcon-*

que DNF égal à AMC, et que l'on tire les cordes *transversales* AF et DC, on formera un angle ABC qui aura pour mesure l'arc AMC compris entre ses côtés, et dont le sommet ne sera pas au centre; et l'on voit qu'il y a une infinité d'angles qui jouissent de cette propriété. Donc *la réciproque du théorème* XX *est fausse.*

Théorème XXVI.

123. *Tout angle qui a pour mesure la moitié de*
Fig. 42. *l'arc concave* AMC, *compris entre ses côtés, a son sommet placé sur la partie restante de la circonférence.*

Cette proposition est la réciproque de celle du n° **115**, et se démontrera d'après la règle du n° **93**.

124. Corollaire. Il suit de là que si l'on fait mouvoir un angle ABC sur un plan, de manière que ses deux côtés passent constamment par deux points fixes A et C de ce plan, son sommet B décrira un arc de cercle tel que tous les angles que l'on pourra y inscrire seront égaux à l'angle B.

125. Remarquons que si l'angle B était droit, l'arc dont il s'agit serait une demi-circonférence (**107**). Donc *le lieu des sommets de tous les angles droits dont les côtés passent par deux points donnés, est une circonférence dont le diamètre est la droite qui les unit.*

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE ET LA CIRCONFÉRENCE.

Problème I.

Fig. 47. **126**. *Partager une droite donnée* AB *en deux parties égales par une perpendiculaire.*

La question revient évidemment (**60**) à trouver deux points également distants des extrémités A et B de la

droite donnée. En conséquence, du point A comme centre, et avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de AB, on décrira de part et d'autre de cette ligne deux arcs de circonférence CD, C'D'; puis du point B comme centre, et avec la même ouverture de compas, on décrira pareillement deux nouveaux arcs FG, F'G', qui couperont les premiers aux points M et M'. Ces points seront chacun également distants des points A et B : donc la droite MM' qui les unit est perpendiculaire sur le milieu de AB.

Les deux arcs CD et C'D' se couperont, car, puisque nous avons pris une ouverture de compas plus grande que la moitié de AB, la somme de leurs rayons est plus grande que cette droite, c'est-à-dire que la distance des centres; et comme d'ailleurs ces rayons sont égaux, leur différence est nulle, et par conséquent moindre que cette même distance. Ainsi les conditions d'intersection sont remplies (**103**).

Nous avons marqué de part et d'autre de AB les deux points M et M' qui déterminent la perpendiculaire demandée, parce qu'une droite qui doit passer par deux points est d'autant mieux déterminée que ces points sont plus éloignés. On conçoit, en effet, que si l'on ne plaçait pas l'arête de la règle rigoureusement à égale distance des deux points, la ligne que l'on tracerait dévierait d'autant plus de la droite demandée que les deux points seraient plus près l'un de l'autre.

Problème II.

127. *Par un point* O *donné sur une droite* AB, *élever une perpendiculaire sur cette droite.* Fig. 48.

Nous distinguerons deux cas, selon que la droite AB sera indéfinie, ou qu'on ne pourra pas la prolonger au delà du point O.

1° Il est clair que si l'on prend de part et d'autre du point O les deux distances égales OC et OD, il ne s'agira plus que d'élever une perpendiculaire sur le

milieu de CD, et il suffira, pour cela, de trouver un point équidistant de C et de D, puique O jouit déjà de cette propriété. En conséquence, des points C et D comme centres, et avec une ouverture de compas plus grande que CO, on décrira deux arcs qui se couperont au point G, et en tirant GO, le problème sera résolu.

Fig. 43. 2° D'un point quelconque C comme centre, avec CO pour rayon, décrivez une circonférence, par le point F où cette circonférence coupe AB tirez le diamètre FCD, et en joignant OD vous aurez la perpendiculaire demandée (**117**).

PROBLÈME III.

128. *D'un point* G *donné hors d'une droite* AB, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Si l'on prend sur la droite AB un point quelconque D, et que du point G comme centre, avec GD pour rayon, on décrive une circonférence, il est clair qu'elle coupera AB en un second point C (**55**, 1°), et le point G sera ainsi également distant de D et de C : si donc on marque un second point G′ qui soit aussi équidistant de D et C (**126**), il suffira de le joindre au point G pour avoir la perpendiculaire demandée.

Si la droite AB n'est pas assez grande pour que l'arc décrit du point G comme centre, avec le rayon GD, puisse la couper en un second point, on prendra sur cette ligne un autre point quelconque A, puis des deux points A et D comme centres, avec les rayons respectifs AG et DG, on décrira au-dessous de AB deux arcs qui se couperont en G′ : de cette manière les points A et D seront équidistants de G et de G′, de sorte que la droite AB sera perpendiculaire sur GG′ (**60**), et réciproquement.

PROBLÈME IV.

Fig. 49. **129.** *Par le point* A *de la droite* AB *mener une droite qui fasse avec elle un angle égal à un angle donné* C.

Du sommet de l'angle C, et avec un rayon quelconque, je décris entre ses côtés l'arc MN; puis du point A comme centre, et avec le même rayon, je décris à partir de la droite AB, l'arc PQ, sur lequel je porte de P en D une ouverture de compas égale à la corde de l'arc MN; je joins AD, et l'angle DAB est égal à NCM : car ce sont des angles au centre qui interceptent des arcs égaux dans deux circonférences égales (**105**).

Problème V.

130. *Diviser un angle donné* AOB *en deux parties égales.* Fig. 50.

Du sommet O comme centre, et avec un rayon arbitraire AO, décrivez l'arc AMB, entre les côtés de l'angle donné; puis abaissez du centre une perpendiculaire sur la corde de cet arc, et le problème sera résolu (**81** et **105**).

On pourra donc partager un angle en un nombre de parties égales qui soit une puissance parfaite de 2 (**105**).

Problème VI.

131. *Par un point donné* C, *mener une parallèle à une droite donnée* AB. Fig. 51.

Ce problème est susceptible de plusieurs solutions, parmi lesquelles nous citerons les suivantes :

1° Si l'on mène par le point C une sécante quelconque CD, il est clair qu'il suffira de faire au point C, et avec cette droite, un angle égal à CDA, ce qui ne saurait présenter de difficulté, mais, comme le rayon des arcs à décrire, pour faire cet angle, est arbitraire, nous le choisirons égal à CD : de cette manière nous pourrons nous dispenser de tracer cette droite CD. Ainsi, du point C comme centre, et d'un rayon aussi grand qu'il sera possible, décrivez, à partir de AB, l'arc DF; puis du point D comme centre et avec la même ouverture de compas, décrivez l'arc CA; prenez

ensuite l'arc DG=CA, et joignez CG : cette droite résoudra le problème.

Fig. 52. 2° D'un point quelconque D de AB, avec DC pour rayon, décrivez les deux arcs CA et BF, le premier terminé en C, et le second indéfini au-dessus de AB ; prenez l'arc BG=AC, et joignez CG : cette droite résoudra le problème (90).

Fig. 53. 3° Placez sur AB le grand côté PQ d'une équerre de dessinateur PRQ, et appliquez une règle le long de l'un quelconque PR des deux autres côtés ; puis, la maintenant invariablement dans cette position, faites glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que le grand côté vienne passer par le point C : alors la ligne CD, tracée le long de P'Q', résoudra le problème : car les angles correspondants R'P'Q' et RPQ sont évidemment égaux.

Problème VII.

Fig. 22. **132.** *Par trois points donnés* A, B, C, *faire passer une circonférence de cercle.*

Je joins AB et BC, j'élève des perpendiculaires DE et FG sur les milieux de ces droites, et de leur point d'intersection O comme centre, avec OA pour rayon, je décris une circonférence qui résoudra le problème.

133. Scholie. *Pour trouver le centre d'un arc, tirez deux cordes quelconques, élevez des perpendiculaires sur les milieux de ces cordes, et leur point d'intersection sera le centre demandé.*

Problème VIII.

Fig. 54. **134.** *Décrire une circonférence qui touche la droite* AB *au point* C *et qui passe en outre par le point* D.

Le lieu géométrique des centres des circonférences tangentes à la droite AB au point C est la perpendiculaire F'F élevée par ce point sur cette droite (84) : donc le centre de la circonférence demandée est sur FF' ; il doit aussi se trouver sur la perpendiculaire G'G

élevée sur le milieu de CD (**59** ou **82**) : donc il est à leur point d'intersection O ; décrivant donc une circonférence du point O comme centre avec le rayon OA, on aura résolu le problème (**58** et **87**).

Ce problème n'admet qu'une solution, puisque, les deux droites FF′ et GG′ ne pouvant avoir qu'un seul point d'intersection, on n'obtient ainsi qu'un seul centre, et partant qu'un seul rayon. Il serait impossible si le point D était donné sur la droite AB : car alors les perpendiculaires FF′ et GG′ seraient parallèles (**62**). Dans tout autre cas il sera possible.

Problème IX.

135. *Décrire sur une droite donnée* AB *un arc* CAPABLE *de l'angle donné* K, *c'est-à-dire tel que tous les angles inscrits dans cet arc soient égaux à l'angle* K. Fig. 55.

Supposons le problème résolu, et soit ACB l'arc demandé : tous les angles inscrits dans cet arc auront pour mesure la moitié de la partie restante AMB de la circonférence, et par conséquent cette moitié devra être la mesure de l'angle donné K. Donc si l'on fait au point B et *au-dessous* de AB l'angle ABD égal à K, cet angle aura pour mesure la moitié de AMB, et par conséquent BD sera tangente à la circonférence (**115** et **118**) : donc cette circonférence doit passer par le point A, et toucher la droite BD au point B, ce qui nous ramène au problème précédent.

Ainsi, pour résoudre le problème, on fera au point B et au-dessous de AB un angle ABD égal à K; on élèvera au point B une perpendiculaire sur BD; on en mènera une seconde sur le milieu de AB; et du point O, où ces deux perpendiculaires se couperont, avec OB pour rayon, on décrira une circonférence. L'arc situé au-dessus de AB résoudra le problème.

Quant à l'arc inférieur AMB, il est capable du supplément de l'angle donné : car la somme des deux

angles AMB et ACB a pour mesure la moitié de la circonférence.

Donc si l'angle donné K est droit, l'arc demandé doit être une demi-circonférence; et, en effet, la perpendiculaire élevée sur BD au point B coïncide alors avec AB. Cela résulte encore de la remarque que nous avons faite au nº **125**.

Problème X.

Fig. 24. **136.** *Par un point* A *donné sur le plan d'une circonférence, mener une tangente à cette circonférence.*

Nous distinguerons deux cas, selon que le point donné sera situé sur la circonférence ou partout ailleurs que sur cette courbe.

Fig. 56. 1° Le point A étant situé sur la circonférence, on le joindra au centre, et en élevant ensuite au point A une perpendiculaire sur le rayon OA, on aura la tangente demandée (**87**).

2° Supposons que le point A ne soit pas situé sur la circonférence et que AT soit la tangente demandée. Si nous joignons OT, l'angle OTA ainsi formé sera droit: donc son sommet se trouvera sur la circonférence décrite sur OA comme diamètre (**125**). Mais ce sommet doit aussi se trouver sur la circonférence donnée: donc il sera à l'intersection de ces deux circonférences. Ainsi, pour résoudre le problème, on tirera OA; sur cette droite, comme diamètre, on décrira une circonférence, et, en joignant le point donné A avec les points d'intersection T et T', on aura les deux tangentes AT et AT', qui résolvent également le problème. Si l'on joint en effet OT et OT', on formera des angles droits OTA et OT'A (**117**): donc ces droites sont chacune perpendiculaires à l'extrémité d'un rayon, et par conséquent tangentes à la circonférence.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que la circonférence ATOT' rencontre la circonférence donnée, et le nombre des solutions sera celui

même de leurs points communs. Or, il peut se présenter trois cas que nous allons examiner successivement.

1er CAS. *Le point* A *est extérieur à la circonférence donnée.* Alors OB est plus petit que OA, c'est-à-dire que la somme faite de l'autre rayon et de la distance des centres, puisque ces deux droites sont chacune la moitié de OA; d'un autre côté, cet autre rayon est moindre que la distance des centres augmentée de OB, donc déjà la distance des centres est plus grande que la différence des rayons (**104**); elle est aussi moindre que leur somme, puisqu'elle est égale à l'un d'eux; donc les deux circonférences se coupent (**103**); donc il y a deux solutions.

2e CAS. *Le point* A *est sur la circonférence donnée.* Alors OB est égal à OA, c'est-à-dire à la distance des centres augmentée de l'autre rayon, ou, en d'autres termes, la distance des centres est égale à la différence des rayons; donc les deux circonférences se touchent intérieurement au point A (**101**), et il n'y a qu'une seule solution.

3e CAS. *Le point* A *est intérieur à la circonférence donnée.* Alors OB est plus grand que OA, c'est-à-dire que la somme faite de la distance des centres et de l'autre rayon, donc la circonférence auxiliaire est intérieure à l'autre, et par conséquent le problème est impossible.

137. COROLLAIRE. Si l'on fait tourner la partie inférieure de la figure autour de OA comme charnière, les deux demi-circonférences AT′O et CT′B viendront recouvrir exactement leurs correspondantes supérieures : donc le point T′ viendra tomber à la fois sur ATO et sur BTC, et par conséquent à leur point de section T; donc *les deux tangentes* AT *et* AT′ *sont égales,* et l'angle TAO = T′AO; de sorte que *la droite qui joint le point de concours de deux tangentes au centre, divise l'angle formé par ces tangentes en deux parties égales.*

138. Réciproquement, si l'on divise l'angle TAT' de deux tangentes en deux parties égales, la droite de division passera par le centre de la circonférence, sans quoi, en joignant ce centre avec le point A, l'angle TAT' serait divisé en deux parties égales par deux droites distinctes, ce qui est absurde.

Donc *le lieu des centres de toutes les circonférences tangentes à deux droites données est la droite qui divise leur angle en deux parties égales.*

139. On peut encore résoudre le problème précédent de la manière suivante :

Fig. 57. Décrivez des points O et A comme centres, et avec les rayons respectifs 2OB et OA, deux circonférences qui se couperont aux points I et I'; joignez ensuite OI et OI', et les points T et T', où ces droites rencontreront la circonférence donnée, seront les points de contact des tangentes demandées : de sorte qu'en joignant AT et AT', le problème sera résolu. Les points T et A sont en effet équidistants de O et de I : donc AT est perpendiculaire sur OI (**60**); donc cette droite est une tangente.

Remarquons que cette méthode fournirait encore le moyen de résoudre le problème, lors même que la circonférence OB ne pourrait pas être tracée. Seulement, après avoir déterminé le point I, il faudrait chercher un point équidistant de I et de O; la droite qui l'unirait au point A serait perpendiculaire sur le milieu de OI, et serait par conséquent tangente à la circonférence [1].

Problème XI.

140. *Décrire une circonférence qui soit tangente*
Fig. 58. *à trois droites indéfinies* PQ, RS *et* TU.

Nous avons vu que le lieu des centres de toutes les

---

[1] Cette méthode est une application de celle que l'on emploie pour mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur, quand on connaît son grand axe et ses foyers.

circonférences tangentes à deux droites est la droite qui partage leur angle en deux parties égales (**138**) : donc si l'on divise les angles en A en deux parties égales par les droites DE et FG, le centre de la circonférence demandée devra se trouver sur l'une ou sur l'autre de ces droites. Par la même raison il devra aussi se trouver sur l'une des deux droites IK et LM, qui partagent les angles en C en deux parties égales : donc il sera l'un des points où elles rencontrent les deux premières, c'est-à-dire O, O′, O″ ou O‴, de sorte que le problème aura quatre solutions. Abaissons en effet du point O, par exemple, les perpendiculaires OC′, OB′, OA′ sur les droites respectives RS, PQ, TU. Il est évident que si l'on plie la figure le long de OA, les droites PQ et RS se recouvriront, puisque les angles SAO et QAO sont égaux : donc les perpendiculaires OC′ et OB′ coïncideront aussi, sans quoi on pourrait abaisser d'un même point deux perpendiculaires sur une même droite; donc elles sont égales. On verrait de même que $OB' = OA'$, et qu'ainsi, si du point O comme centre, et avec OA′ pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente aux trois droites données.

Les trois autres points O′, O″ et O‴ sont de même les centres de trois circonférences faciles à décrire, et qui seront aussi des solutions de la question.

Quoiqu'on n'ait pas fait usage des angles en B, on ne doit pas penser que les droites qui les partagent en deux parties égales fournissent de nouvelles solutions : car ces droites, étant le lieu des centres de toutes les circonférences tangentes à RS et à TU, devront nécessairement aller passer, l'une par les points O et O‴, et l'autre par O′ et O″.

Si l'on suppose que la droite RS, par exemple, tourne autour du point A, dans le sens indiqué par la flèche, en allant de droite à gauche, elle entraînera les droites GF et DE, de sorte que, quand elle sera devenue parallèle à TU, ces droites le seront respectivement à IK et à LM (**69**, 3°, et **70**) : donc alors les centres O′ et O″

n'existeront plus, et ainsi le problème n'admettra plus que deux solutions (¹).

Enfin si les trois droites étaient parallèles, le problème serait évidemment impossible.

Problème XII.

Fig. 59. **141**. *Décrire une circonférence qui touche une circonférence donnée* O, *et soit en outre tangente à une droite donnée* AB *en un point donné* C.

Soit O′ le centre inconnu de la circonférence demandée : ce point se trouvera évidemment sur la perpendiculaire indéfinie DD′, menée à AB par le point C. D'un autre côté, si les deux circonférences doivent être tangentes extérieurement, O O sera la somme des deux rayons : par conséquent, si l'on prend CD égal au rayon de O, le centre O′ sera également distant des points O et D, de sorte qu'il sera déterminé par l'intersection de DD′ avec la perpendiculaire FF′ élevée sur le milieu de OD. Mais si les deux circonférences doivent se toucher intérieurement, la distance de leurs centres sera la différence de leurs rayons ; et conséquemment si l'on prend CD′ égal au rayon de la circonférence O, le centre inconnu sera équidistant des points O et D′, et se trouvera ainsi à l'intersection O″ de DD′ avec la perpendiculaire GG′ élevée sur le milieu de OD′.

On voit donc que le problème admet en général deux solutions, si, comme nous l'avons supposé, le point C est extérieur à la circonférence donnée. Cepen-

---

(¹) Il est clair que, dans le mouvement de la droite AE autour de A, le point O′ s'éloignera de plus en plus du point C, et qu'en même temps l'angle AO′C=O′AE′ (69, 1°) diminuera continuellement. On voit encore que la *limite* de la distance O′C sera l'*infini*, tandis que celle de l'angle O′ sera *zéro*. Or quand ces limites seront atteintes, la droite AE sera devenue parallèle à CM : car alors elle ne la rencontrera plus. Ainsi nous pourrons dire que *deux droites sont parallèles quand elles ne se rencontrent qu'à une distance infinie, ou qu'elles font un angle nul.*

dant, si la droite AB était tangente à la circonférence O, il est clair que OD′ serait alors parallèle à cette droite (**67**), et qu'ainsi le centre O″ s'éloignerait à l'infini [**140** (¹)]. Dans ce cas la circonférence O″C dégénérerait dans la tangente AB (**102**).

Si le point C était sur la circonférence O, CD et CD′ seraient alors égales à OC, et ainsi les points O′ et O″ coïncideraient avec C : donc les circonférences O′C et O″C se réduiraient au point C.

Si le point C est intérieur à la circonférence O, la construction réussit toujours ; mais les deux circonférences sont intérieures à la circonférence donnée.

Enfin, si AB est tangente à la circonférence O, et que C soit précisément le point de contact, le problème admet une infinité de solutions (**102**).

142. Problèmes a résoudre. 1° *Décrire une circonférence qui touche deux droites données et l'une d'elles en un point donné.*

2° *Décrire une circonférence qui touche une circonférence donnée en un point donné et qui passe par un second point donné.— Déduire de la solution trouvée celle du problème du* n° **134**.

3° *Décrire une circonférence qui touche une circonférence donnée en un point donné et soit en outre tangente à une droite donnée.*

4° *Décrire une circonférence d'un rayon donné, et qui touche à la fois une droite et une circonférence données.*

5° *Par un point donné sur le plan d'une circonférence tirer une sécante telle que la corde interceptée soit égale à une droite donnée.*

LIVRE II.

DES POLYGONES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

143. *On appelle* POLYGONE *une portion de plan terminée de toutes parts par des lignes droites que l'on nomme les* CÔTÉS *du polygone.*

144. Si une ligne droite, tracée d'une manière quelconque, ne peut rencontrer le *périmètre*, c'est-à-dire le contour d'un polygone, en plus de deux points, on dit que ce polygone est *convexe* ou à *angles saillants*; et dans le cas contraire il est *concave* ou à *angles*
Fig. 60. *rentrants*. ABCDEF est un polygone convexe, et GHIKLMN en est un concave. Les angles saillants de celui-ci sont G, H, K, L, M; et I et N sont ses angles rentrants. Il faut entendre par l'angle rentrant I toute la portion du plan du polygone qui serait parcourue par le côté indéfiniment prolongé IK, s'il tournait autour de I de manière que son point k vînt, en décrivant l'arc klh, se rabattre en h sur IH. Ainsi cet angle est égal à quatre droits, moins l'angle KIH.

On appelle *diagonale* la droite qui joint les sommets de deux angles non adjacents : telles sont les droites AD et MK.

Quand nous parlerons d'un polygone, il s'agira toujours d'un polygone convexe, à moins que nous n'exprimions précisément le contraire.

145. On appelle *polygone inscrit à un cercle* celui dont tous les angles ont leurs sommets sur sa circonférence; en même temps on dit que le cercle est *circonscrit* à ce polygone.

Un polygone est *circonscrit à un cercle* lorsque tous ses côtés sont des tangentes à la circonférence. Le cercle est alors *inscrit* dans ce polygone.

146. On distingue les polygones d'après le nombre de leurs côtés ou de leurs angles, ce qui revient tout à fait au même, et on leur a donné des noms qui désignent précisément le nombre de ces angles ou de ces côtés. Ainsi on appelle

Triangles les polygones de	3 côtés;
Quadrilatères..........	4
Pentagones............	5
Hexagones............	6
Heptagones...........	7
Octogones............	8
Ennéagones...........	9
Décagones............	10
Endécagones..........	11
Dodécagones..........	12
Etc.	

On ne pousse pas ordinairement cette nomenclature au delà du dodécagone, si ce n'est pour le *pentédécagone,* qui est le polygone de 15 côtés.

147. On conçoit très-bien que deux figures, un cercle et un triangle, par exemple, peuvent renfermer entre leurs côtés des portions égales de l'étendue, sans cependant être superposables. Nous exprimerons qu'il en est ainsi en disant que ces figures sont *équivalentes,* et nous réserverons la dénomination de figures *égales* pour celles qui pourront être superposées.

Les triangles et les quadrilatères ont des propriétés qui leur sont particulières : nous allons les étudier d'abord, et nous verrons ensuite quelles sont les propriétés communes aux polygones de tous les ordres.

CHAPITRE PREMIER.

DES TRIANGLES.

Théorème I.

148. *La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

Fig. 61. Pour le démontrer, je prolonge le côté BC, et je mène par le point C la droite CD, parallèle à AB. La somme des trois angles du triangle est égale à celle des trois angles formés autour du point C; car d'abord l'angle ACB est commun à toutes deux; l'angle A est égal à l'angle ACD comme alternes-internes, par rapport aux parallèles AB et CD et à la sécante AC; et l'angle B est égal à DCF, son correspondant par rapport aux mêmes parallèles et à la sécante BF. Mais la somme des trois angles formés autour du point C vaut deux droits : donc celle des trois angles du triangle ABC vaut aussi deux droits.

149. Corollaire i. *Chaque angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres :* ainsi *quand deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre, et les deux triangles sont équiangles entre eux.*

150. Corollaire ii. *L'angle* extérieur ACF *d'un triangle (on appelle ainsi celui qui est formé par un côté et le prolongement d'un autre) est égal à la somme des deux intérieurs opposés* A et B; car cette somme des angles A et B a pour supplément l'angle ACB, qui est aussi le supplément de ACF (**59**).

151. Corollaire iii. *Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit, et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.*

152. Ce dernier corollaire conduit à une division

des triangles en trois classes, d'après la nature de leurs angles. *On nomme triangle* RECTANGLE *celui qui a un angle droit, et on appelle* HYPOTÉNUSE *le côté opposé à l'angle droit.* Le triangle ABC est un triangle rectangle dont BC est l'hypoténuse. Il est évident que *dans un triangle rectangle les deux angles aigus sont complémentaires.* Fig. 62.

153. On appelle triangle *acutangle* celui dont les trois angles sont aigus, et triangle *obtusangle* celui qui a un angle obtus. Tels sont ABC et DEF. Fig. 63.

154. On distingue aussi les triangles d'après les rapports qui existent entre leurs côtés. Ainsi *on appelle triangle* SCALÈNE *celui dont les trois côtés sont inégaux;* ISOCÈLE *celui dont deux côtés sont égaux*, et alors le troisième côté est dit la *base* du triangle, et le sommet de l'angle opposé à la base est le *sommet* du triangle.

Il suit du n° **60** que la droite qui va du sommet d'un triangle isocèle au milieu de sa base est perpendiculaire à cette base. Cette droite se nomme *la hauteur* du triangle. On voit donc qu'*un triangle isocèle est déterminé lorsqu'on connaît sa base et sa hauteur.*

Enfin *on nomme triangle* ÉQUILATÉRAL *celui qui a ses trois côtés égaux.*

THÉORÈME II.

155. *De deux angles d'un triangle celui-là est le plus grand qui est opposé à un plus grand côté; et réciproquement, le plus grand de deux côtés est celui qui est opposé à un plus grand angle.*

Supposons, en effet, que le côté AC soit plus grand que AB. Il suit immédiatement de cette hypothèse que la perpendiculaire DE, élevée sur le milieu de CB, ira couper AC entre A et C, sans quoi le point A serait plus près de C que de B (**58**) : de sorte qu'en joignant EB, cette droite sera tracée dans l'angle ABC; mais nous avons vu, dans la démonstration du n° **55**, Fig. 64.

que les angles ECB et EBC sont superposables : donc l'angle ECB est plus petit que ABC.

Supposons actuellement que l'angle ABC soit plus grand que ACB. Si l'on élève encore une perpendiculaire sur le milieu de CB et que l'on joigne le point B avec le point E où elle rencontrera AC, l'angle EBC ainsi formé sera égal à ACB, et par conséquent la droite EB sera tracée dans l'angle ABC : donc le point E se trouve entre A et C; donc le point A est à droite de la perpendiculaire ED, donc AC est plus grand que AB.

156. Corollaire. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand des côtés, et dans un triangle obtusangle, le côté opposé à l'angle obtus est le plus grand (**151**).

Théorème III.

157. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux; et, réciproquement, si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront égaux.*

Faites usage du mode de démonstration employé au n° **93**, en vous appuyant sur le théorème du n° **155**.

158. Corollaire. *Un triangle équilatéral est aussi équiangle, et réciproquement.*

On voit encore que chaque angle d'un triangle équilatéral est les deux tiers d'un droit, de sorte qu'il a pour mesure un arc de 60°.

Théorème IV.

Fig. 65. **159**. *Deux triangles* ABC, A′B′C′ *sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal* B = B′, *compris entre deux côtés égaux chacun à chacun* AB *et* A′B′, BC *et* B′C′.

Portons en effet le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC en plaçant les points B′ et C′ respectivement sur les points B et C. Le côté B′C′ coïncidera ainsi avec son égal BC. Par conséquent, puisque l'angle B′ est égal à l'angle B, le côté A′B′ prendra la direction

AB; et, comme ils sont égaux, le point A′ tombera nécessairement sur le point A. Le côté A′C′ aura ainsi les mêmes extrémités que AC : donc ces deux côtés coïncideront; donc le triangle A′B′C′ recouvrira exactement le triangle ABC; donc il lui est égal.

160. Corollaire. Nous appellerons *angles homologues* deux angles qui sont opposés à des côtés égaux, et *côtés homologues* ceux qui sont opposés à des angles égaux. Cela posé, il suit de la superposition des deux triangles ABC et A′B′C′ que les angles B et C sont respectivement égaux à leurs homologues B′ et C′, et que le côté BC est égal à son homologue B′C′ : donc, *quand deux triangles seront égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, on devra en conclure que leurs parties homologues sont égales.*

Théorème V.

161. *Deux triangles* ABC, A′B′C′ *sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal* AB = A′B′, *adjacent à deux angles égaux chacun à chacun* A *et* A′, B *et* B′.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, en mettant les points A′ et B′ respectivement sur les points A et B. Le côté A′B′ coïncidera ainsi avec son égal AB. Par conséquent, puisque l'angle B′ est égal à l'angle B, le côté C′B′ prendra la direction CB, et le point C′ se trouvera ainsi sur quelque point de la droite indéfinie BC. De même, puisque l'angle A′ est égal à l'angle A, le côté A′C′ prendra la direction AC, et le point C′ ira encore tomber sur quelque point de la droite AC : donc ce point C′, devant se trouver à la fois sur les deux droites BC et AC, tombera nécessairement à leur point d'intersection C. Donc le triangle A′B′C′ recouvrira exactement le triangle ABC; donc il lui est égal.

162. Corollaire i. *Quand deux triangles sont*

égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, leurs parties homologues sont égales; car elles sont superposables, puisque les triangles le sont.

163. Corollaire ii. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun :* car ils sont alors équiangles (**149**), et satisfont ainsi aux conditions énoncées dans le numéro **161**.

164. Corollaire iii. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

Théorème VI.

Fig. 66. **165.** *Si deux triangles* ABC, A′B′C′ *ont deux côtés égaux chacun à chacun,* AB = A′B′, *et* AC = A′C′, *que l'angle* A *compris entre les deux côtés du premier soit plus grand que l'angle* A′ *compris entre les deux côtés du second, le troisième côté* BC *du premier triangle surpassera le troisième côté* B′C′ *du second.*

Je porte, en effet, le triangle A B′C′ sur ABC, de manière que A′C′ coïncide avec AC; et soit ACB″ la position que prendra ce triangle. Je partage l'angle B″AB en deux parties égales par la droite AI et je joins IB″. Les deux triangles BAI et B″AI seront égaux (**159**), et par conséquent le côté B″I sera égal à son homologue BI. Or l'angle CAB étant plus grand que C′A′B′, la droite AB″ est nécessairement tracée dans l'angle CAB, et par suite la bissectrice AI de l'angle B″AB va couper CB de telle sorte que CI + IB = CB. Mais la droite CB″ est plus courte que la brisée CI + IB″, ou que CI + IB ; donc le côté CB″, c'est-à-dire CB′, est plus petit que CB.

Théorème VII.

166. Réciproquement, *si deux triangles* ABC,

A′B′C′, *ont deux côtés égaux chacun à chacun,* AB = AB′, *et* AC = A′C′, *et que le troisième côté* BC *du premier soit plus grand que le troisième côté* B′C′ *du second, l'angle* A, *opposé au troisième côté du premier triangle, surpassera son correspondant* A′ *dans le second.*

Cette réciproque se démontrera d'après le principe que nous avons établi au nº **93**, en s'appuyant sur les théorèmes des nºs **159** et **165**.

Théorème VIII.

167. *Deux triangles* ABC, A′B′C′, *sont égaux lorsqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun,* AB = A′B′, AC = A′C′, *et* BC = B′C′. Fig. 65.

Il suffit, pour démontrer cette proposition, de faire voir que l'angle A, par exemple, est égal à son homologue A′ : car alors les deux triangles auront un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et seront par conséquent égaux. Or, si l'angle A n'est pas égal à l'angle A′, il sera plus grand ou plus petit que lui; si A est plus grand que A′, comme les côtés qui le comprennent sont respectivement égaux à ceux de A′, on devra en conclure que BC est plus grand que B′C′ (**165**), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc l'angle A n'est pas plus grand que A′. On prouverait de même qu'il n'est pas plus petit que A′ : donc il lui est égal; donc les triangles A′B′C′ et ABC sont égaux.

On peut donner de cette proposition la démonstration suivante, qui a l'avantage d'être indépendante des théorèmes énoncés aux nºs **159** et **165**.

Plaçons le triangle A′B′C′ au-dessous de ABC, de manière que les deux sommets B′ et C′ coïncident avec leurs homologues B et C; et soit A″ la position que prendra ainsi le troisième sommet A′, de sorte que BA″ = BA, et que CA″ = CA. Chacun des points B et C sera ainsi équidistant de A et de A″; et par conséquent, si l'on joint AA″, la droite BC sera perpen-

diculaire sur le milieu de AA″ (**60**) : donc, si l'on plie la figure le long de BC, AI se rabattra sur IA″ (**36**), et le point A sur le point A″; donc les deux triangles ABC et A″BC se recouvriront parfaitement; donc ils sont égaux. Mais BCA″ n'est autre que A′B′C′ : donc ABC = A′B′C′.

168. Corollaire. *Quand deux triangles sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, on doit en conclure que leurs angles homologues sont égaux.*

169. Scholie. Il suit de ce qui précède qu'il y a trois cas dans lesquels deux triangles sont égaux : ce sont ceux énoncés aux nos **159**, **161** et **167**, et, dans chaque cas, on conclut de leur égalité que les parties homologues de ces triangles sont égales. Par conséquent, *lorsque l'on voudra établir l'égalité de deux angles ou de deux droites, il suffira de vérifier que ces angles ou ces droites sont des parties homologues de triangles égaux.*

Théorème IX.

170. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal.*

Fig. 67. Soient l'hypoténuse BC=B′C′, et le côté AC=A′C′. Je porte le triangle A′B′C′ sur ABC, en posant les points A′ et C′ sur leurs homologues A et C, de sorte que A′C′ coïncidera avec AC : alors A′B′ tombera sur AB (**37**), et le point B′ se trouvera quelque part sur AB. De cette manière nous aurons du même côté de la perpendiculaire CA, et à partir du même point C, deux obliques égales CB et C′B′ sur AB : donc elles devront coïncider : donc les triangles ABC et A′B′C′ se recouvrent parfaitement; donc ils sont égaux.

CHAPITRE II.

DES QUADRILATÈRES.

171. Parmi les quadrilatères on distingue *le trapèze*, *le parallélogramme*, *la losange*, *le rectangle et le carré.*

172. On appelle *trapèze* un quadrilatère ABCD, Fig. 68.
dont deux côtés seulement sont parallèles.

Les côtés parallèles AB et DC se nomment *les bases* du trapèze, et la perpendiculaire DE abaissée d'un point de l'une des bases sur l'autre, en est *la hauteur.*

173. *Le parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.* Telle est la figure 69.

THÉORÈME I.

174. *Les côtés opposés* AB *et* CD, BC *et* AD, *d'un parallélogramme* ABCD *sont égaux.*

Tirons la diagonale AC, et nous formerons les deux Fig. 69.
triangles égaux ABC et ACD. En effet, le côté AC leur est commun, l'angle CAB est égal à ACD : car ils sont alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD et à la sécante AC; de même l'angle ACB est égal à CAD, son alterne-interne, par rapport aux parallèles CB et AD et à la même sécante : donc les deux triangles ABC et ACD ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux (**161**); donc leurs parties homologues sont égales (**162**) : ainsi le côté CB opposé à l'angle CAB, est égal au côté AD, opposé à l'angle ACD; de même le côté AB est égal à son homologue CD; donc enfin les côtés opposés de deux parallélogrammes sont égaux.

175. COROLLAIRE. *Les parties de deux paralleles comprises entre deux autres parallèles sont égales.*

176. Scholie. *Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux :* car leurs côtés sont parallèles et dirigés en sens contraires.

Théorème II.

177. Réciproquement, *si dans un quadrilatère* ABCD *les côtés opposés* AB *et* CD, BC *et* AD, *sont égaux, la figure sera un parallélogramme.*

Si nous tirons la diagonale AC, les deux triangles ABC et ACD, que nous formerons ainsi, auront leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et seront par conséquent égaux (**167**). Donc leurs angles homologues seront égaux (**168**) : ainsi l'angle CAB, opposé au côté BC, sera égal à l'angle ACD, opposé au côté AD. Mais ces angles sont alternes-internes par rapport aux droites AB et CD et à la sécante AC : donc ces droites sont parallèles (**70**). Par une raison semblable AD est parallèle à CB; donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (**173**).

Théorème III.

Fig. 69. **178**. *Si deux côtés* AB *et* CD *d'un quadrilatère sont égaux et parallèles, la figure sera un parallélogramme.*

Tirons encore la diagonale AC, et les deux triangles ABC et ACD, que nous formerons ainsi, auront un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : car le côté AC est commun ; AB=CD ; et puisque ces deux côtés sont de plus parallèles, les angles CAB et ACD sont égaux comme alternes-internes : donc les triangles ABC et ACD sont égaux ; donc leurs angles homologues ACB et CAD sont égaux ; donc les droites CB et AD sont parallèles (**70**); donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme (**173**).

Théorème IV.

179. *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Si l'on compare, en effet, les deux triangles AOB et COD, on voit que le côté AB est égal à CD (**174**), que l'angle OAB=OCD, et que l'angle OBA=ODC (**69**, 1°) : donc les deux triangles AOB et COD sont égaux (**161**); donc leurs côtés homologues AO et OC, OB et OD, sont égaux; donc les deux diagonales AC et BD se coupent mutuellement en parties égales.

180. Scholie. Si l'on mène par le point de section O des deux diagonales une sécante quelconque, les parties OI et OK comprises entre le point O et le périmètre du parallélogramme seront égales : car les triangles DOI et KOB sont égaux (**161**). Cette propriété dont jouit le point O l'a fait nommer le *centre* de figure du parallélogramme. En général, *on appelle* centre *d'une ligne ou d'une surface un point tel que toute sécante menée par ce point rencontre la ligne ou la surface en des points qui en sont deux à deux équidistants.*

Théorème V.

181. *Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Il sera facile de démontrer ce théorème en superposant les deux figures.

182. Dans un parallélogramme et dans un triangle on donne le nom de *base* à l'un quelconque des côtés, et l'on appelle *hauteur* la perpendiculaire abaissée sur la base d'un point quelconque du côté opposé du parallélogramme ou du sommet de l'angle opposé du triangle, sommet que l'on nomme le *sommet* du triangle. AB est la base du parallélogramme ABCD, et CE est sa hauteur. AB, CD et C sont respectivement la base, Fig. 70.
la hauteur et le sommet du triangle ABC.

183. Si les deux côtés contigus d'un parallélogramme ABCD sont égaux, les deux autres sont aussi Fig. 71.
égaux entre eux et à ces deux-là (**174**), et la figure

prend alors le nom de *losange*. Ainsi, *la* LOSANGE *est un quadrilatère dont les côtés sont égaux.*

184. Il suit du nº **177** que *la losange est un parallélogramme,* et qu'en conséquence ses diagonales doivent se couper mutuellement en deux parties égales (**179**). Mais il y a plus, elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre : car les deux triangles AOB, BOC, sont équilatéraux entre eux, et ainsi l'angle AOB est égal à son homologue BOC.

On pourrait dire encore que les sommets opposés A et C étant chacun équidistants des deux autres B et D, la diagonale qui les unit est perpendiculaire sur le milieu de celle qui joint ces deux derniers (**60**), et réciproquement.

Fig. 72. **185**. Si l'un quelconque des angles d'un parallélogramme est droit, son adjacent le sera aussi (**69**, 4°); et, comme ces deux angles sont égaux à leurs opposés (**71**), le parallélogramme aura ses quatre angles droits, et en conséquence on lui donnera le nom de *rectangle*. Ainsi, *le* RECTANGLE *est un quadrilatère dont les angles sont droits.*

186. *Les diagonales d'un rectangle se coupent mutuellement en deux parties égales* (**179**) ; *et de plus elles sont égales :* car les triangles ABC et ABD, par exemple, ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; donc leurs hypoténuses AC et BD sont égales.

Fig. 73. **187**. Si deux côtés contigus d'un rectangle ABCD sont égaux, les deux autres le seront aussi, et la figure se nommera alors un *carré*. *Le* CARRÉ *est* donc *un quadrilatère dont les côtés sont égaux et les angles droits.* Ses diagonales se coupent en deux parties égales (**179**), à angles droits (**184**), et elles sont égales (**186**).

188. Nous avons vu que l'on pouvait faire passer une circonférence par trois points qui ne sont pas en ligne droite, et par conséquent par les sommets d'un
Fig. 74. triangle ABC, mais que l'on n'en pouvait faire passer

qu'une (**79**) : donc un quatrième point E pris au hasard sur le plan de ce triangle ne se trouvera point sur la circonférence dont il s'agit ; par conséquent, un quadrilatère quelconque n'est pas inscriptible au cercle ; à plus forte raison en est-il de même pour un polygone d'un plus grand nombre de côtés. Quelles sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un quadrilatère soit inscriptible ?

Théorème VI.

189. *Dans tout quadrilatère inscrit* ABCD *la somme des angles opposés est égale à deux droits ; et réciproquement, si deux angles opposés* A *et* C *sont supplémentaires, le quadrilatère est inscriptible au cercle.*

1° En effet, dans le quadrilatère inscrit ABCD la somme des deux angles opposés A et C a pour mesure la demi-somme des arcs DCB et DAB, c'est-à-dire la moitié de la circonférence : donc cette somme vaut deux droits.

2° Soit ABCD un quadrilatère dans lequel les deux angles opposés A et C sont supplémentaires. Nous pourrons toujours faire passer une circonférence par les trois sommets B, A, D, et je dis qu'elle passera aussi par le quatrième C. En effet, les angles A et C étant supplémentaires, leur somme doit avoir pour mesure la moitié de la circonférence. Mais l'angle inscrit A a pour mesure la moitié de l'arc DMB : donc l'angle C doit avoir pour mesure la moitié de l'arc *concave* restant DAB compris entre ses côtés (aucun des angles A et C n'est rentrant (**144**), puisque leur somme vaut deux droits) ; donc son sommet est situé sur la circonférence BADMB (**123**) ; donc le quadrilatère est inscriptible.

190. Corollaire I. *Le rectangle et le carré sont inscriptibles.* Cela résulte d'ailleurs des n^os^ **186** et **187**, ou encore du n° **125**.

191. Corollaire ii. *Le parallélogramme et la losange ne sont pas inscriptibles :* car alors la somme de leurs angles opposés serait égale à deux droits ; donc ces angles seraient droits, puisque, d'ailleurs, ils sont égaux (**176** et **184**) ; donc, au lieu d'un parallélogramme ou d'une losange, on aurait un rectangle ou un carré.

Théorème VII.

Fig. 75 et 76. **192**. *Dans tout quadrilatère* ABCD *circonscrit au cercle, la somme de deux côtés opposés* AB *et* CD *est égale à celle des deux autres* BC *et* AD ; *et* réciproquement, *tout quadrilatère est convexe circonscriptible, lorsque la somme de deux côtés ouposés est égale à celle des deux autres.*

1° Soient F, G, I, K, les points de contact des côtés du quadrilatère avec la circonférence, on a évidemment

$$AB = AF + FB = AK + BG \ (\mathbf{137});$$

et $$CD = CI \pm ID = CG \pm DK;$$

En ajoutant ces deux égalités membre à membre, il viendra

$$AB + CD = BC + DA.$$

Fig. 75. 2° Soit ABCD un quadrilatère, tel que

$$AB + CD = BC + DA,$$

je dis qu'il est circonscriptible à la circonférence. Décrivons, en effet, une circonférence qui soit tangente aux trois droites AD, AB et BC (**141**) ; soit F son point de contact avec AB, et O son centre. J'abaisse de ce centre, OI perpendiculaire sur DC, et je dis que $OI = OF$. S'il n'en est pas ainsi, nous pourrons prendre, sur cette perpendiculaire, une distance $OI' = OF$; et en menant D'C' parallèlement à DC par le point I', on formera un quadrilatère ABC'D' qui sera circonscrit à la circonférence KGF, puisque ses quatre côtés sont équidistants du centre O. Nous aurons donc (1°) :

$$AB + D'C' = BC' + AD'.$$

Mais, par hypothèse,

$$AB + DC = BC + AD;$$

donc on aura, en retranchant ces deux égalités membre à membre,

$$DC - D'C' = DD' + CC',$$

ou bien, en ajoutant D'C' de part et d'autre,

$$DC = DD' + D'C' + CC',$$

ce qui est évidemment absurde. Donc OI n'est pas différent de OF ; donc OI = OF ; donc la circonférence IGF est tangente aux quatre côtés du quadrilatère.

193. Corollaire. La losange et le carré sont circonscriptibles au cercle ; mais le parallélogramme et le rectangle ne le sont pas.

194. Scholie. Il suit des n[os] **189** et **192** que la losange et le rectangle ne sont pas en même temps inscriptibles et circonscriptibles au cercle, mais que le carré jouit de cette propriété.

On peut se demander s'il y a des quadrilatères autres que le carré qui soient à la fois inscriptibles et circonscriptibles au cercle. Pour répondre à cette question, j'inscris un quadrilatère quelconque ABCD dans un cercle ; puis, ayant divisé deux de ses angles adjacents A et B chacun en deux parties égales par les droites AI et BI, j'abaisse de leur point de section I les perpendiculaires IP et IK sur les côtés respectifs AB et CD. La première IP mesurera la distance du point I aux trois côtés AB, AD et BC (**140**) : donc, si l'on prend IQ = IP et que par le point Q on mène C'D' parallèle à CD, le quadrilatère ABC'D' sera circonscrit à la circonférence décrite du point I comme centre avec le rayon IP. Je dis qu'il est aussi inscriptible (**189**) : car l'angle C', par exemple, étant égal à son correspondant C, est par conséquent le supplément de son opposé A. Fig. 77.

CHAPITRE III.

DES POLYGONES EN GÉNÉRAL.

Théorème I.

195. *La somme des angles intérieurs de tout polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux.*

Fig. 60. 1° Soit ABCDEF un polygone convexe quelconque. Si du sommet de l'angle A on mène des diagonales aux sommets de tous les angles non adjacents à celui-ci, on partagera le polygone ABCDEF en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux : car les deux triangles extrêmes ABC et AFE comprennent chacun deux côtés du polygone, tandis que les triangles intermédiaires n'en contiennent qu'un seul. Or la somme des angles de chaque triangle vaut deux droits : donc la somme des angles de tous les triangles vaut autant de fois deux droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone. Mais la somme des angles de tous les triangles est évidemment égale à celle des angles du polygone : donc enfin la somme des angles d'un polygone convexe quelconque est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux.

Fig. 78. * 2° Soit un polygone concave ABCDEFGIK. Joignons AI, GE, EC, et nous formerons ainsi le polygone *convexe* ABCEGIA, dont la somme des angles sera égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux. Or, il est clair qu'en partant de ce polygone on reproduira le proposé si l'on substitue aux droites AI, GE, EC, les brisées AKI, GFE, EDC. Examinons donc de combien variera la somme de ses angles par chacune de ces substitutions, et commençons par la première : or, en remplaçant le côté AI

par la brisée AKI, nous diminuerons la somme des angles du polygone ABCEGIA des deux angles KAI et KIA, puisque nous substituons les angles BAK et GIK aux angles BAI et GIA; mais nous l'augmenterons aussi de l'angle rentrant K, c'est-à-dire de quatre droits moins AKI : donc la somme des angles du polygone est augmentée de quatre droits et diminuée des trois angles KAI, KIA, AKI, c'est-à-dire diminuée de deux droits (148); donc elle est augmentée de deux droits; donc la somme des angles du nouveau polygone ABCEGIKA surpasse celle des angles du polygone primitif ABCEGIA de deux droits; mais il a aussi un côté de plus; donc la somme des angles du polygone ABCEGIKA est encore égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux, et, comme on pourra répéter, pour les autres angles rentrants F et D, le même raisonnement que nous venons de faire pour l'angle K, le théorème est ainsi démontré.

Il pourrait arriver que les trois points A, I, G, fussent en ligne droite. Alors, en substituant la brisée AKI à la droite AI, on augmenterait le nombre des côtés du polygone de deux unités, mais aussi la somme de ses angles augmenterait de quatre droits. En effet, en remplaçant la droite AI par la brisée AKI, on diminue la somme des angles du polygone ABCEGA de l'angle KAI, mais on l'augmente des nouveaux angles K et GIK; or ce dernier, étant extérieur au triangle AKI, vaut la somme des deux intérieurs opposés KAI et AKI (150) : donc la somme des angles du polygone augmente de K + KAI + AKI, et diminue de KAI; donc elle augmente de K + AKI, c'est-à-dire de quatre droits, mais aussi le nombre des côtés a augmenté de deux unités. Fig. 79.

Enfin il pourrait encore se faire que la droite AI, prolongée, traversât le polygone, de sorte que le polygone ABCEGIA serait lui-même concave, comme on le voit dans la figure. Alors on joindrait AG, et l'on partirait du polygone convexe ABCEGA; puis, Fig. 80.

en substituant d'abord la brisée AIG à la droite AG, et ensuite AKI à AI, on reviendrait au polygone primitif.

196. Scholie. Le théorème que nous venons de démontrer peut encore s'énoncer ainsi qu'il suit :

La somme des angles intérieurs de tout polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés, moins quatre droits : car, en répétant deux droits autant de fois qu'il y a de côtés moins deux, il s'en faut évidemment de deux fois deux droits ou de quatre droits que l'on n'obtienne autant de fois deux droits qu'il y a de côtés. Au reste, on serait conduit *directement* à cet énoncé pour un polygone *convexe* en le décomposant en triangles par des diagonales parties d'un point pris dans l'intérieur de ce polygone.

Théorème II.

197. *Si l'on prolonge tous les côtés d'un poly-*
Fig. 81. *gone convexe quelconque* ABCDE *dans le même sens,* c'est-à-dire dans le sens même où nous avons ainsi nommé ses côtés, *la somme de tous les angles extérieurs* (**150**) B'BC, C'CD, D'DE, etc., *est égale à quatre droits.*

En effet, chaque angle intérieur, tel que ABC, réuni à son extérieur adjacent B'BC, vaut deux droits: donc la somme de tous les angles tant intérieurs qu'extérieurs du polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés; si donc on en retranche la somme des angles intérieurs, qui vaut autant de fois deux droits qu'il y a de côtés, moins quatre droits (**196**), il restera évidemment quatre droits pour la somme des angles extérieurs.

Théorème III.

***198.** *Si l'on prolonge dans le même sens tous les*
Fig. 82. *côtés d'un polygone concave quelconque* ABCDEF, *la différence entre la somme des angles extérieurs des*

angles saillants et celle des angles extérieurs des angles rentrants est égale à quatre droits.

En effet, chaque angle saillant, tel que ABC, *augmenté* de son extérieur B′BC, vaut deux droits; et chaque angle rentrant, tel que C, *diminué* de son extérieur C′CD, vaut aussi deux droits : donc, si à la somme de tous les angles intérieurs du polygone on ajoute la somme des angles extérieurs des angles saillants, et que l'on en retranche la somme des angles extérieurs des angles rentrants, on trouvera autant de fois deux droits qu'il y a de côtés. Par conséquent, si l'on retranche de cette quantité la somme de tous les angles intérieurs, c'est-à-dire autant de fois deux droits qu'il y a de côtés, moins quatre droits, le reste, *quatre droits*, exprimera l'excès de la somme des angles extérieurs des angles saillants sur celle des angles extérieurs des angles rentrants, et c'est précisément là ce qu'on voulait démontrer [1].

199. Scholie. Ainsi la diversité infinie que le caprice peut mettre dans la forme des polygones n'empêche pas que leurs angles intérieurs ou extérieurs ne soient assujettis à une relation constante.

Théorème IV.

200. *Deux polygones quelconques sont égaux lorsque tous leurs côtés, à l'exception d'un seul, sont égaux chacun à chacun, et que les angles compris entre les côtés égaux sont aussi égaux chacun à chacun.*

---

[1] Remarquons encore que, si l'on convient de regarder comme *négatifs* les angles extérieurs des angles rentrants, et les autres comme *positifs*, ce qui est conforme au principe de l'application de l'algèbre à la géométrie cité dans la note [1] du n° 119, car ces angles sont dans des positions directement contraires par rapport à l'angle du polygone, on pourra comprendre les deux théorèmes des nos 197 et 198 dans un même énoncé, en disant que,

Si l'on prolonge tous les côtés d'un polygone quelconque dans le même sens, la somme algébrique *de ses angles extérieurs sera égale à quatre droits.*

Fig. 83. Supposons, en effet, que dans les deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′, on ait AB = A′B′, BC = B′C′, CD = C′D′, DE = D′E′, et que les angles B, C, D, soient respectivement égaux aux angles B′, C′, D′. Je porte le second polygone sur le premier, en posant les points A′ et B′ sur leurs homologues A et B : de cette manière le côté A′B′ coïncidera avec AB; et, comme l'angle B′ = B, le côté B′C′ prendra la direction BC. Mais B′C′ = BC : donc le point C′ tombera sur C. Or l'angle C′ = C : ainsi le côté C′D′ prendra la direction CD; et, comme C′D′ = CD, le point D′ tombera sur D. On verra de même que E′ tombera sur E, et qu'en conséquence les deux côtés A′E′ et AE coïncideront, puisque leurs extrémités seront confondues. Donc les deux polygones sont égaux.

Théorème V.

201. *Deux polygones sont égaux lorsqu'ils ont tous leurs angles, à l'exception d'un seul, égaux chacun à chacun, et que les côtés adjacents aux angles égaux sont aussi égaux chacun à chacun.*

Ce théorème se démontrerait comme le précédent en superposant les deux polygones.

202. Corollaire. Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (**181**).

203. Il y a plusieurs autres cas d'égalité de deux polygones; mais, comme ils sont peu importants, nous ne nous arrêterons pas à les énumérer. Nous observerons seulement que si, dans la suite, on a besoin de prouver l'égalité de deux polygones qui ne satisferaient pas aux conditions énoncées aux n^os^ **200** et **201**, on devra les superposer, et, s'ils coïncident parfaitement, en conclure qu'ils sont effectivement égaux.

204. Scholie. Il suit des deux théorèmes précédents qu'un polygone est déterminé quand on connaît, 1° tous ses côtés à l'exception d'un seul, ainsi que les angles compris entre chacun de ces côtés et le suivant; 2° tous

ses angles moins un, ainsi que tous les côtés qui leur sont respectivement adjacents. Observons d'ailleurs que lorsqu'on a tous les angles, moins un, d'un polygone, ce dernier est connu (**195**).

On voit que le nombre des données nécessaires dans ces deux cas à la détermination d'un polygone de n côtés est $n-1+n-2=2n-3$. Mais il faut dire encore entre quels côtés les angles donnés sont compris, ou à quels angles les côtés donnés sont adjacents. Ainsi un pentagone ne serait pas déterminé par la connaissance seule des quatre côtés a, b, c, d, et des angles β, γ, δ; mais si l'on ajoute que β est compris entre a et b, γ entre b et c, et δ entre c et d, on pourra construire le polygone. Pour cela, à l'extrémité B d'une droite Fig. 81.
$AB=a$, on fera un angle $ABC=\beta$, on prendra $BC=b$; puis au point C on fera un angle $BCD=\gamma$, on prendra $CD=c$; ensuite on fera au point D un angle $CDE=\delta$, et l'on prendra $DE=d$; en joignant enfin EA, le polygone sera construit.

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES SUR LES POLYGONES.

Problème I.

205. *Construire un triangle dont on connaît deux côtés* a *et* b *et l'angle compris* C.

Tracez une droite CB égale au côté a, par exemple; Fig. 84.
puis faites au point C un angle égal à l'angle donné C, et prenez sur le second côté de cet angle une distance $CA=b$. Enfin tirez AB, et le problème sera résolu.

Ce problème est toujours possible.

Problème II.

206. *Construire un triangle dont on connaît un côté* b *et deux angles* A *et* C.

Il peut se présenter deux cas, selon que le côté donné est adjacent aux deux angles donnés A et C, ou qu'il est opposé à l'un d'eux, C, par exemple.

Fig. 85. *Premier cas.* Tirez la droite AC égale au côté donné *b;* faites à ses extrémités des angles égaux aux deux angles donnés A et C, et le triangle ABC ainsi formé résoudra évidemment le problème.

Second cas. Aux deux extrémités d'une droite quel-
Fig. 86. conque AD faites des angles égaux aux angles donnés, et le troisième angle F du triangle AFD ainsi formé sera le troisième angle du triangle demandé (**149**) : ce sera donc l'un des angles adjacents au côté donné. A étant l'autre, on prendra sur la droite indéfinie AF une longueur AB égale au côté donné *b;* et, en menant par le point B une parallèle BC au côté FD, on formera le triangle ABC, qui résoudra le problème.

Le problème sera toujours possible si la somme des deux angles donnés est moindre que deux droits.

207. Si l'on propose de construire un triangle rectangle, connaissant un de ses angles aigus, et son hypoténuse *en grandeur et en position*, on décrira sur
Fig. 87. cette hypoténuse AB une circonférence, et le sommet de l'angle droit devra se trouver sur cette courbe (**125**); faisant ensuite au point A l'angle CAB égal à l'angle donné A, et joignant CB, on aura une solution du problème. Mais, comme l'angle donné ne doit pas avoir son sommet en A plutôt qu'en B, on prendra sur la demi-circonférence ACB l'arc BC' = AC; et, en joignant C'A et C'B, on aura une seconde solution. Enfin on en aura encore deux autres en prenant sur la demi-circonférence inférieure les arcs AC'' et BC''' égaux à l'arc AC, et joignant les points C'' et C''' avec les extrémités de AB.

Ainsi ce problème admet quatre solutions, mais il faut remarquer que les quatre triangles ainsi construits sont égaux (**164**).

PROBLÈME III.

208. *Construire un triangle dont on connaît les trois côtés* a, b et c.

Tracez une droite quelconque BC égale à l'un des côtés donnés, *a* par exemple; du point C comme centre, et avec le second côté *b* pour rayon, décrivez un arc; du point B comme centre, et avec un rayon égal au troisième côté *c*, décrivez un autre arc, qui coupera le premier en A; joignez AB et AC, et le triangle ABC résoudra le problème. Fig. 88.

209. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux arcs que l'on a décrits puissent se couper, et, pour cela, que le côté *a* soit plus petit que la somme des deux autres *b* et *c*, et plus grand que leur différence (**103**); et, comme le côté des extrémités duquel les deux circonférences ont été décrites est quelconque, on en conclut que, *pour que l'on puisse construire un triangle avec trois droites données, il faut et il suffit que l'une d'elles soit moindre que la somme des deux autres et plus grande que leur différence*, conditions que l'on peut évidemment comprendre dans celle-ci : *Le plus grand côté doit être moindre que la somme des deux autres.*

PROBLÈME IV.

210. *Étant donnés deux côtés* a *et* b *d'un triangle, et l'angle* A *opposé au premier, construire le triangle.* Fig. 89, 90, 91 et 92.

A l'extrémité A d'une droite AC $=b$, faites un angle égal à l'angle donné A; puis, du point C comme centre, et avec un rayon égal à *a*, décrivez un arc qui coupera le côté AB de cet angle en B, et joignez BC : le triangle ABC résoudra évidemment le problème. Examinons maintenant cette solution. Il peut se présenter trois cas, selon que l'angle A est obtus, droit ou aigu.

Premier cas. Si l'angle A est obtus, le côté *a* qui lui est opposé doit être plus grand que *b* (**155**), et ainsi Fig. 89.

le problème sera impossible si cette condition n'est pas remplie. Et en effet, si du point C on abaisse une perpendiculaire sur AB, elle tombera nécessairement sur son prolongement, sans quoi on aurait dans un triangle un angle droit et un angle obtus, ce qui est absurde (**148**), puisque d'ailleurs elle ne peut couper AB en A : donc, pour que la circonférence puisse couper AB, il faut et il suffit que son rayon a soit plus grand que $AC = b$.

Fig. 90. *Second cas.* Si l'angle A est droit, il faut encore que a soit plus grand que b (**156**). Si cette condition est remplie, la circonférence coupera AB et son prolongement, et les deux triangles ABC, AB′C, satisferont à la question. Mais ces deux solutions n'en font qu'une; car on voit, en pliant la figure le long de AC, que ces deux triangles se recouvrent exactement (**170**).

Fig. 91. *Troisième cas.* Si l'angle A est aigu, et que le côté a soit plus grand que b, la circonférence enveloppera le point A, et par conséquent coupera AB et son prolongement : donc le problème sera possible, et n'admettra qu'une solution. Il en sera de même si $a = b$; car alors A sera un point d'intersection. Dans ces deux cas, l'angle B sera *aigu*, puisqu'il sera ou plus petit que A (**155**) ou égal à A (**157**).

Fig. 92. Si $a < b$, la circonférence ne coupera la droite indéfinie AB qu'autant que a ne sera pas moindre que la perpendiculaire CI abaissée du point C sur cette droite (**53**). Si $a = CI$, la circonférence sera tangente à AB au point I (**87**). Le triangle AIC résoudra alors le problème, et l'angle B sera *droit*. Enfin si $a > CI$, la circonférence coupera AB aux deux points B et B′; car A lui est extérieur. Alors les deux triangles ABC, AB′C, satisferont également à la question. Ainsi le problème admettra deux solutions; et ce qui les différencie, c'est que dans l'un de ces deux triangles l'angle opposé au côté b est aigu, et que dans l'autre il est obtus : en outre ces deux angles sont supplémentaires; car dans le triangle CBB′ l'angle BB′C

est égal à B (157), et de plus il est supplémentaire de A B′ C.

Problème V.

211. *Construire un parallélogramme, connaissant deux côtés* a, b, *et l'angle compris* A.

A l'extrémité d'une droite A B égale à a, je fais un angle D A B = A, et je prends sur son second côté une longueur A D = b. Puis des points B et D comme centres, et avec les rayons respectifs b et a, je décris deux arcs qui se coupent en C ; je joins C B et C D, et A B C D est le parallélogramme demandé. En effet, ce quadrilatère est un parallélogramme (177) ; car il est clair que ses côtés opposés sont égaux ; de plus l'angle A et les côtés qui le comprennent ont été faits égaux à l'angle et aux deux côtés donnés. Fig. 69.

On voit que le problème n'admet qu'une seule solution, et qu'ainsi un parallélogramme est déterminé par deux côtés et l'angle compris.

212. Puisqu'un parallélogramme est déterminé lorsque l'on donne deux de ses côtés et l'angle compris, on voit 1° qu'*une losange le sera par la connaissance d'un angle et d'un coté ;*

2° Qu'*un rectangle est déterminé quand on connaît ses deux côtés contigus,* que l'on nomme *sa base* et *sa hauteur ;*

3° Qu'*un carré est déterminé par la connaissance de son coté*, et on construira d'ailleurs ces trois figures par le procédé du n° **211**.

Problème VI.

213. *Construire un polygone égal à un polygone donné.*

La méthode que nous avons indiquée au n° **204** peut évidemment servir à résoudre ce problème, mais elle présente un inconvénient assez grave, en ce que la moindre erreur commise sur un angle influant sur les directions des côtés de tous les angles suivants, la

longueur du côté qui doit fermer le polygone pourra être très-sensiblement altérée. Le procédé qui suit, d'ailleurs plus simple, est à l'abri de cet inconvénient.

Fig. 93. Par le sommet A du polygone donné ABCDEFGI tirez une droite quelconque AA′ d'une grandeur arbitraire, et par tous les autres sommets menez-lui des parallèles indéfinies sur lesquelles vous prendrez des longueurs BB′, CC′,...... toutes égales à AA′ et joignez enfin A′B′, B′C′, C′D′...... Il est clair que le polygone A′B′C′D′E′F′G′I′ est égal à ABCDEFGI; car leurs côtés et leurs angles homologues sont égaux chacun à chacun (**178**, **174** et **71**).

214. Problèmes a résoudre. 1° *Construire un triangle connaissant un angle, un des côtés qui lui sont adjacents et la somme ou la différence des deux autres côtés.*

2° *Construire un triangle, connaissant un angle, la somme ou la différence des côtés qui le comprennent et le troisième côté.*

3° *Construire un triangle, connaissant le rayon du cercle inscrit à ce triangle, un de ses côtés et la somme ou la différence des deux autres.*

4° *Étant donnés un angle d'un triangle et les rayons des cercles qui lui sont inscrits et circonscrits, construire ce triangle.*

5° *Construire un triangle connaissant sa base, sa hauteur et le rayon du cercle inscrit ou celui du cercle circonscrit.*

Fig. 94. 6° *Étant données deux circonférences* O *et* O′ *et deux droites* AB *et* CD *de grandeur et de position, construire un triangle dont un des côtés ait ses extrémités sur ces deux circonférences, et dont les deux autres côtés soient respectivement égaux et parallèles à* AB *et à* CD.

7° *Par un point donné sur le plan de deux parallèles, mener une sécante telle que la somme ou la différence des distances des points où elle les coupera au point donné soit égale à une droite donnée.*

8° *En quel point la bille placée en* F *doit-elle aller frapper la bande* AB *d'un billard, pour venir choquer une bille placée en* G (1)?

9° *En quel point la bille placée en* F *doit-elle aller frapper la bande* AB *d'un billard pour qu'après avoir heurté successivement les trois autres bandes* BC, CD *et* DA *elle vienne choquer une bille placée en* G?

10° *Mener par l'un des points d'intersection de deux circonférences une sécante telle que la somme ou la différence des cordes qu'elle laissera dans ces deux circonférences soit égale à une droite donnée m. — Dans quel cas la somme des deux cordes sera-t-elle la plus grande possible?*

11° *Construire un triangle égal à un triangle donné et qui soit tel que les directions de ses côtés passent par trois points donnés.*

12° *Par trois points donnés faire passer les côtés d'un triangle équilatéral qui soit le plus grand possible.*

---

(1) On sait que la direction que suit la bille en se réfléchissant fait avec la bande un angle égal à celui que fait avec elle la droite suivant laquelle elle est venue la heurter.

LIVRE III.

DES LIGNES PROPORTIONNELLES ET DES POLYGONES SEMBLABLES.

CHAPITRE PREMIER.

DES LIGNES PROPORTIONNELLES.

Théorème I.

Fig. 96. **215.** *Trois parallèles* AB, CD *et* EF *coupent deux droites quelconques* AE *et* BF *en parties proportionnelles,* c'est-à-dire qu'on aura la proportion

AC : CE :: BD : DF.

Nous distinguerons deux cas, selon que les droites AC et CE seront commensurables ou qu'elles ne le seront pas.

1° Supposons que AC et CE soient commensurables et que leur commune mesure soit contenue 8 fois dans AC et 3 fois dans CE : le rapport de ces deux droites sera $\frac{8}{3}$. Si, par tous les points de division de AE, on tire des parallèles à EF, je dis qu'on partagera ainsi BF en *onze* parties égales, de sorte que BD en contenant *huit* et DF *trois,* le rapport de BD à DF sera aussi $\frac{8}{3}$. En effet, si par tous les points de division de BF on mène des parallèles à AE, on formera une suite de triangles BGI, IKL, LMN, NOP,.... qui seront tous égaux (**161**), car les côtés BG, IK, LM, NO.... sont égaux aux parties de AE (**175**), et par conséquent égaux entre eux; les angles B, I, L, N.... sont correspondants, et les angles G, K, M, O.... ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens; donc ces triangles sont tous égaux; donc BI = IL = LN

$= NP\ldots$; donc enfin le rapport de BD à DF est $\frac{8}{3}$, et par conséquent

$$AC : CE :: BD : DF.$$

2° Supposons que les droites AC et CE soient incommensurables. Je partage CE en un nombre quelconque de parties égales, et je porte l'une de ces parties sur AC autant de fois qu'elle pourra y être contenue. Soit AG le reste que je trouverai ainsi : je tire GI parallèle à AB, et comme les droites GC et CE sont commensurables, j'aurai Fig. 97.

$$\frac{GC}{CE} = \frac{ID}{DF},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{AC - AG}{CE} = \frac{BD - BI}{DF}.$$

Or, AG et BI sont deux quantités variables qui tendent en même temps vers zéro, à mesure que le nombre des parties dans lesquelles on divise la droite CE est plus grand; donc les rapports variables $\frac{AC - AG}{CE}$ et $\frac{BD - BI}{DF}$ tendent respectivement vers les limites $\frac{AC}{CE}$ et $\frac{BD}{DF}$; mais ces rapports variables sont constamment égaux; donc leurs limites sont égales; donc

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}, \text{ ou bien } AC : CE :: BD : DF,$$

ce qu'il fallait démontrer [1].

---

[1] On peut donner de ce théorème une démonstration analogue à celle que nous avons indiquée dans la note du n° 108.

Portons CE sur AC autant de fois que la chose sera possible : Fig. 98.
nous trouverons qu'elle y est contenue *deux* fois, avec le reste GC, de sorte que

$$AC = 2CE + GC.$$

Mais si, par les points de division I et G, nous menons des parallèles à AB, nous déterminerons sur BF des parties BK et KL égales à DF, car, si l'on tire BM, KN, DO parallèles à AE, ces droites seront égales respectivement à AI, IG, CE (175);

216. Corollaire i. *Si l'on coupe deux droites* Fig. 99. *quelconques* AB *et* A'B' *par une suite de parallèles* AA', CC', DD', etc., *les parties de l'une seront proportionnelles aux parties correspondantes de l'autre,* de sorte qu'on aura

$$AC : A'C' :: CD : C'D' :: DF : D'F' :: FB : F'B'.$$

Fig. 100. **217.** Corollaire ii. *Toute parallèle* DF *à l'un des côtés* BC *d'un triangle coupe les deux autres côtés en parties proportionnelles,* car on peut concevoir une troisième parallèle par le sommet A. Ainsi on aura

$$AD : DB :: AF : FC.$$

En appliquant à cette proportion le principe du n° **229** de l'arithmétique, il viendra

$$AB : AC :: AD : AF :: DB : FC.$$

---

de plus, les angles B, K, D, seront égaux comme correspondants, et les angles M, N, O, le seront aussi comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens : donc les triangles BMK, KNL, DOF sont égaux (161); donc leurs côtés homologues BK, KL, DF, sont égaux (162). Ainsi

$$BD = 2DF + LD.$$

On voit donc que la droite BD contient DF autant de fois que AC contient EC, et que le reste LD (LD est plus petite que DF, sans quoi GC serait ou égale à CE, ou plus grande que cette droite) correspond au reste GC. Par conséquent, si l'on porte à son tour GC sur CE, et que, par les points de division on mène des parallèles à AB, on verra de même que FD contiendra LD autant de fois que CE contiendra GC, et que la partie restante de la première correspondra à la partie restante de la seconde, et ainsi de suite, si l'on continue d'effectuer sur les droites AC et CE et sur BD et DF les opérations nécessaires pour trouver la commune mesure des deux premières lignes et celle des deux autres. Les deux séries de quotients que l'on obtiendra ainsi seront donc les mêmes. Par conséquent si l'on développe en fraction continue le rapport des deux droites AC et CE, et celui des deux droites BD et DF, on trouvera la même expression (30); donc ces deux rapports sont égaux, donc on a la proportion

$$AC : CE :: BD : DF,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème II.

218. Réciproquement *toute droite* CD *qui divise en parties proportionnelles les deux côtés non-parallèles d'un trapèze* ABEF *est parallèle aux deux bases*, c'est-à-dire que si l'on a la proportion

$$AC : CE :: BD : DF,$$ Fig. 97.

la droite CD sera parallèle à AB.

En effet, si cela n'a pas lieu, je mènerai par le point C une parallèle CD′ à AB, et j'aurai ainsi

$$AC : CE :: BD' : D'F.$$

Cette proportion et la précédente ayant un rapport commun, on en conclut

$$BD : DF :: BD' : D'F.$$

Or, cette proportion est absurde, car le premier antécédent est plus grand que le second, tandis que le premier conséquent est au contraire plus petit que le second. Donc on ne pouvait pas supposer que la droite CD ne fût pas parallèle à AB; donc ces deux lignes sont parallèles.

Cette démonstration est, comme on voit, une nouvelle application du principe que nous avons posé au n° 48.

219. Corollaire i. *Toute droite qui divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles est parallèle au troisième*, car on peut regarder un triangle comme un trapèze dont une des bases serait nulle.

220. Corollaire ii. Donc *si l'on coupe en parties proportionnelles les droites* AB, AC, AD, AE, AF, Fig. 101.
menées d'un même point A *aux différents points de la droite* XY, *tous les points de division* B′, C′, D′, E′, F′ *seront en ligne droite.*

Théorème III.

221. *Toute droite qui divise un angle intérieur ou extérieur d'un triangle en deux parties égales, partage le côté opposé en deux* segments additifs *ou*

SOUSTRACTIFS [1] *qui sont proportionnels aux côtés adjacents.*

Fig. 102. 1° Soit AI la bissectrice de l'angle A, je lui mène par le point B une parallèle terminée en D au prolongement du côté CA, et nous aurons ainsi la proportion (217)

$$IB:IC::AD:AC,$$

de sorte que la première partie de notre théorème sera démontrée si nous prouvons que $DA = BA$. Or, l'angle $BDA = IAC$ (69, 3°), l'angle $DBA = BAI$ (69, 1°); mais les angles IAC et BAI sont égaux par hypothèse; donc $BDA = DBA$; donc $DA = BA$, et par suite

$$IB:IC::AB:AC\dots.(1).$$

2° Soit AI′ la bissectrice de l'angle extérieur DAB, on fera la même construction, et en prouvant que $D'A = AB$ on arrivera à la proportion

$$I'B:I'C::AB:AC\dots.(2).$$

222. Corollaire. Si le point A se meut de telle manière que le rapport de ses distances aux points B et C reste constant, les bissectrices de l'angle BAC et de son supplément BAD couperont toujours la droite indéfinie BC aux points I et I′, or l'angle IAI′ qu'elles forment est droit; donc le point A parcourra la circonférence décrite sur II′ comme diamètre. Donc *le lieu géométrique de tous les points dont les distances à deux points donnés* B *et* C *sont dans le rapport constant* $\frac{p}{q}$, *est la circonférence qui a pour diamètre l'intervalle compris entre les deux points de* BC, *dont les distances à* B *et à* C *sont proportionnelles à* p *et à* q.

---

(1) On appelle segments d'une droite les distances d'un point de sa direction à ses deux extrémités, et les segments sont dits additifs ou soustractifs, selon que ce point est situé sur la droite ou sur son prolongement.

Théorème IV.

223. *Deux triangles équiangles entre eux ont leurs côtés homologues proportionnels.* (Les côtés homologues sont ceux qui sont opposés à des angles égaux.)

Supposons les trois angles A, B, C, respectivement égaux aux angles A′, B′, C′ : je dis que les deux triangles ABC et A′B′C′ auront leurs côtés homologues proportionnels. Fig. 103.

En effet, puisque l'angle A=A′, si l'on prend sur les côtés AB et AC des parties AD et AF respectivement égales à A′B′ et à A′C′, et qu'on joigne DF, on formera un triangle ADF égal à A′B′C′ (**159**) : donc leurs parties homologues sont égales; ainsi le côté DF=B′C′, et l'angle ADF=B′; par conséquent cet angle ADF est aussi égal à B; donc la droite DF est parallèle à BC (**70**, 3°); donc on a la proportion (**217**).

AB : AD :: AC : AF.

Or, si l'on mène FG parallèle à AB, cette droite coupera les deux côtés AC et BC en parties proportionnelles; et, comme BG=DF (**175**), on aura la proportion

AC : AF :: BC : DF.

Donc, à cause du rapport commun AC : AF, on aura

AB : AD :: AC : AF :: BC : DF,

ou, en remplaçant les lignes AD, AF et DF par leurs égales A′B′, A′C′ et B′C :

AB : A′B′ :: AC : A′C′ :: BC : B′C′,

ce qu'il fallait démontrer.

224. Scholie. Observez que dès que l'on aura reconnu que deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, on pourra en conclure que leurs côtés homologues sont proportionnels : car le troisième angle de l'un sera égal au troisième de l'autre (**149**).

Théorème V.

Fig. 102. **225.** *Les droites* AC, AD, AE, *qui partent du sommet d'un triangle* ABF, *divisent sa base et sa parallèle* B′F′ *en parties proportionnelles, et sont aussi coupées par cette parallèle en parties proportionnelles.*

En effet, les triangles ABC et AB′C′, ACD et AC′D′, ADE et AD′E′, AEF et AE′F′ sont équiangles (**69**, 3°) : donc leurs côtés homologues sont proportionnels (**223**); ainsi nous aurons entre ces côtés les quatre suites de rapports égaux

$$AB : AB' :: BC : B'C' :: AC : AC',$$
$$AC : AC' :: CD : C'D' :: AD : AD',$$
$$AD : AD' :: DE : D'E' :: AE : AE',$$
$$AE : AE' :: EF : E'F' :: AF : AF'.$$

Chaque suite étant ainsi liée avec celle qui vient après par un rapport commun, on doit en conclure que tous les rapports qui les composent sont égaux, et qu'ainsi

$$BC : B'C' :: CD : C'D' :: DE : D'E' :: EF : E'F',$$

et que

$$AB : AB' :: AC : AC' :: AD : AD' :: AE : AE' :: AF : AF' :$$

ce qui prouve, 1° que les droites BF et B′F′ sont coupées en parties proportionnelles; 2° que la droite B′F′ coupe AB, AC, AD, AE et AF en parties proportionnelles.

Théorème VI.

Fig. 104. **226.** *Si deux angles* BAC, B′A′C′, *ont leurs côtés* AB *et* A′B′, AC *et* A′C′ *parallèles, proportionnels, et dirigés dans le même sens ou en sens contraires, les droites qui joindront les extrémités* B *et* B′, C *et* C′ *de leurs côtés homologues, iront concourir avec celle qui joint leurs sommets* A *et* A′.

En effet, soit O le point de concours de BB′ et de AA′, je dis que les trois points O, C′ et C sont sur une même ligne droite. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, et soit C″ le point où OC coupe A′C′; puisque

A′C′ est parallèle à AC les triangles OAC et OA′C″ sont équiangles et par conséquent (223)

$$AC : A'C'' :: OA : OA';$$

mais les triangles OAB et OA′B′ donnent pareillement

$$AB : A'B' :: OA : OA':$$

donc, à cause du rapport commun,

$$AB : A'B' :: AC : A'C''.$$

Or, on a, par hypothèse,

$$AB : A'B' :: AC : A'C';$$

cette proportion et la précédente ont trois termes correspondants égaux; donc leurs quatrièmes termes sont égaux, donc $A'C'' = A'C'$; donc les trois points O, C′ et C sont en ligne droite, ce qu'il fallait démontrer.

227. Scholie. Remarquons que cette démonstration est indépendante de la grandeur des angles égaux BAC et B′A′C′, et qu'elle s'appliquerait au cas où les lignes brisées BAC et B′A′C′ deviendraient deux droites parallèles.

D'où il suit que *les diagonales d'un trapèze, ainsi que les directions des côtés non-parallèles, vont se croiser sur la droite qui joint les milieux des deux bases :* car les droites AI et MC, IB et DM, sont pro- Fig. 68.
portionnelles, parallèles et de sens contraires, et les droites AI et DM, BI et MC sont proportionnelles, parallèles et de mêmes sens.

Donc, *si une droite glisse sur le plan d'un triangle parallèlement à sa base, et que, dans chacune de ses positions, on joigne avec les extrémités de la base les points où elle coupe les deux autres côtés*, LE LIEU *des points de section de toutes les lignes de jonction sera la droite, qui va du sommet du triangle au milieu de sa base.*

Théorème VII.

228. *Deux sécantes* OA *et* OB *qui partent d'un* Fig. 105.
même point O *pris hors d'une circonférence, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties ex-*

térieures OC *et* OD, c'est-à-dire que l'on a la proportion

OA : OB :: OD : OC,

dans laquelle l'une des sécantes et sa partie extérieure forment les deux extrêmes ou les deux moyens.

Pour le démontrer, joignons AD et BC, et nous formerons deux triangles équiangles ADO et OBC : car l'angle O leur est commun, et les angles inscrits A et B s'appuient sur le même arc CD. Leurs côtés homologues sont donc proportionnels : ainsi

OA (opposé à l'angle D) : OB (son homologue, comme opposé à l'angle C, l'égal de D) :: OD (opposé à l'angle A) : OC [son homologue, comme opposé à l'angle B, l'égal de A [1]],

ce que nous voulions démontrer.

229. Corollaire. Si l'on observe que la démonstration précédente est indépendante de la grandeur de la corde BD que la sécante OB laisse dans la circonférence, on en conclura que la proportion ci-dessus subsistera toujours, si l'on fait tourner OB autour de O, de manière qu'elle tende à sortir du cercle : donc elle aura encore lieu à la limite, c'est-à-dire quand la corde BD sera devenue nulle. Mais alors la sécante OB et sa partie extérieure OD seront devenues égales toutes deux à la tangente OT : donc on aura alors :

OA : OT :: OT : OC;

ce qui nous apprend que *lorsqu'une tangente et une sécante partent d'un même point, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure* [2].

---

[1] Toutes les fois que l'on établira une proportion entre les côtés de deux triangles, on ne devra *jamais* négliger de constater, ainsi que nous venons de le faire, que les deux termes de chaque rapport sont des côtés homologues.

[2] Ce théorème pourrait se démontrer *à priori* de la manière suivante :

Si nous joignons les points A et C avec le point de contact

Théorème VIII.

230. *Les parties de deux cordes* AC, BD, *qui* Fig. 106.
se coupent, sont réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire que l'on a la proportion

$$OA : OB :: OD : OC,$$

dans laquelle les deux parties d'une corde forment les extrêmes ou les moyens.

En effet, si nous joignons AD et BC, nous formerons les deux triangles équiangles AOD et BOC : car les angles en O sont opposés par le sommet, et les angles inscrits A et B s'appuient sur le même arc DC; donc leurs côtés homologues sont proportionnels; ainsi

$$OA : OB :: OD : OC,$$

ce qui démontre notre proposition.

231. Scholie. Si, dans les proportions fournies par les théorèmes des n°s 228, 229 et 230, on égale le produit des moyens à celui des extrêmes, on trouvera $OA . OC = OB . OD = \overline{OT}^2$; d'où l'on voit que ces trois théorèmes sont compris dans le suivant :

Théorème IX.

Si d'un point quelconque, on mène arbitrairement une sécante à une circonférence, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection est constant.

232. *On appelle projection d'une droite* AB *sur* Fig. 107.
une autre XY, *la portion* A'B' *de cette seconde comprise entre les perpendiculaires abaissées sur elle des deux extrémités de la première.* D'où l'on voit que dans un triangle rectangle chaque côté de l'angle

---

T, nous formerons les deux triangles équiangles AOT et COT : car ils ont l'angle commun O, et les angles OAT et CTO ont chacun pour mesure la moitié de l'arc CT : donc leurs côtés homologues sont proportionnels; ainsi

$$OA : OT :: OT : OC.$$

droit est la projection de l'hypoténuse sur sa direction.

Théorème X.

Fig. 108. **233**. *Si du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC *on abaisse une perpendiculaire* AI *sur l'hypoténuse,*

1° *Cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront équiangles, et qui le seront par conséquent entre eux.*

2° *Elle sera moyenne proportionnelle entre les deux segments* BI *et* IC *de l'hypoténuse.*

3° *Chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection sur cette hypoténuse.*

4° *Le carré de la longueur* (**26**) *de l'hypoténuse sera égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.* (Cette proposition est connue en géométrie sous le nom de *théorème de Pythagore,* du nom du philosophe qui l'a découverte.)

5° *Les carrés des longueurs des trois côtés seront proportionnels aux longueurs des projections de ces côtés sur l'hypoténuse.*

En effet, 1° les triangles ABI et ABC sont équiangles : car ils sont rectangles l'un en I, l'autre en A; l'angle B leur est commun : donc le troisième angle BAI du premier est égal au troisième angle C du second.

On démontrerait de la même manière que les triangles AIC et ABC sont équiangles, et que par conséquent les deux triangles AIB et AIC jouissent de la même propriété [on le ferait voir directement en observant que leurs angles aigus ont leurs côtés perpendiculaires (**74**)].

2° Les triangles AIB et AIC étant équiangles, leurs côtés homologues BI et AI, AI et IC, sont proportionnels : ainsi on a la proportion

$$BI : AI :: AI : IC,$$

ce qui prouve que la perpendiculaire AI est moyenne proportionnelle entre les deux segments BI et IC de l'hypoténuse.

3° Puisque les triangles AIB et ABC sont équiangles, leurs côtés homologues BI et AB, AB et BC, sont proportionnels : on a donc la proportion

$$BI : AB :: AB : BC \ldots\ldots (1).$$

Les triangles AIC et ABC donnent de même, en comparant leurs côtés homologues,

$$IC : AC :: AC : BC \ldots\ldots (2).$$

Donc chaque côté AB ou AC de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse BC et sa projection BI ou IC sur cette hypoténuse.

4° Si l'on suppose que l'on ait *mesuré* (**23**) les trois côtés de notre triangle, ainsi que les segments BI et IC de l'hypoténuse, et que les proportions (1) et (2) aient été établies entre les longueurs trouvées, on pourra, dans chacune, égaler le produit des moyens à celui des extrêmes, ce qui donnera

$$\overline{AB}^2 = BI.BC,$$

et

$$\overline{AC}^2 = IC.BC.$$

Si l'on additionne ces deux égalités membre à membre, et que dans l'addition des seconds membres on mette BC en facteur commun des quantités qu'elle multiplie, on trouvera

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (BI + IC).BC;$$

mais $BI + IC = BC$; donc on aura enfin :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

Ainsi le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

5° Puisque nous venons de voir à l'instant que

$$\overline{AB}^2 = BI.BC, \quad \overline{AC}^2 = CI.BC;$$

et comme d'ailleurs

$$\overline{BC}^2 = BC.BC,$$

nous aurons évidemment la suite de rapports égaux

$$\overline{AB}^2 : BI.BC :: \overline{AC}^2 : CI.BC :: \overline{BC}^2 : BC.BC;$$

car la raison de chaque rapport est l'unité.

Divisant maintenant tous les conséquents par BC, ce qui revient à multiplier chaque rapport par ce *nombre,* il viendra

$$\overline{AB}^2 : BI :: \overline{AC}^2 : CI :: \overline{BC}^2 : BC,$$

ce qui démontre que les carrés des longueurs des trois côtés sont proportionnels aux longueurs de leurs projections respectives BI, CI et BC, sur l'hypoténuse.

234. Corollaire i. Il suit du principe 4° que, *pour calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle, lorsque l'on connaît les longueurs des deux autres côtés, il faut additionner les carrés de ces longueurs et extraire la racine carrée de leur somme.* Si, par exemple, les deux côtés de l'angle droit avaient respectivement 3 mètres et 4 mètres, on élèverait les deux nombres *abstraits* 3 et 4 au carré, ce qui donnerait 9 et 16, et l'on extrairait la racine carrée de leur somme, 25. Cette racine est 5 : donc l'hypoténuse a 5 mètres.

235. Il suit encore du même principe que, si du carré de l'hypoténuse [1] on retranche le carré d'un des côtés de l'angle droit, le reste sera le carré de l'autre côté : donc, *pour calculer un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, on retranchera du carré de l'hypoténuse le carré du côté connu, et l'on extraira la racine carrée du reste.* On trouvera ainsi que dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse a 5^m et l'un des côtés 4^m, l'autre vaut

$$\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3^m.$$

[1] Désormais, quand nous voudrons parler du carré de la longueur d'une droite, du produit ou du quotient des longueurs de deux droites, nous dirons, pour abréger, le carré de cette droite, le produit ou le quotient de ces droites.

236. Corollaire ii. Si d'un point quelconque A d'une circonférence on mène les deux cordes AB, AC, aux extrémités du diamètre BC, on formera un triangle rectangle ABC (**117**), auquel on pourra appliquer les principes 2° et 3° : on en conclura donc que

1° *La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre* [1]. Cette proposition découle immédiatement de celle du n° **230**, en y supposant que les deux cordes soient perpendiculaires entre elles et que l'une d'elles soit un diamètre.

2° *Toute corde menée par l'extrémité d'un diamètre est moyenne proportionnelle entre ce diamètre et sa projection sur lui.*

237. Corollaire iii. *Si des extrémités d'un même diamètre on tire différentes cordes* AC, AD, BF....., *les carrés de ces cordes seront proportionnels à leurs projections sur le diamètre*. Il suit en effet du corollaire précédent que *le carré d'une corde est égal au produit de la projection de cette corde par le diamètre* : ainsi Fig. 109.

$$\overline{AC}^2 = AC'.AB, \ldots \overline{AD}^2 = AD'.AB, \ldots \overline{BF}^2 = BF'.AB;$$

d'ailleurs $\overline{AB}^2 = AB.AB$: donc

---

[1] Ce théorème fournit une solution de ce problème d'algèbre : *Partager un nombre donné en deux parties dont le produit soit* maximum ? On peut concevoir en effet que l'on ait décrit une circonférence dont la longueur du diamètre soit exprimée par ce nombre (26) : alors, si d'un point quelconque de cette circonférence on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre, il suit du théorème en question que le produit des deux segments de ce diamètre sera égal au carré de cette perpendiculaire ; mais le maximum de cette droite est le rayon : donc le produit des deux segments sera maximum quand la perpendiculaire ira tomber au centre : car c'est alors seulement qu'elle sera égale au rayon. Donc, *pour partager un nombre en deux parties dont le produit soit* maximum, *il faut le partager en deux parties égales.*

$$\overline{AC}^2 : AC'.AB :: \overline{AD}^2 : AD'.AB :: \overline{BF}^2 : BF'.AB :: \overline{AB}^2 : AB.AB;$$

d'où, en divisant tous les conséquents par le nombre AB,

$$\overline{AC}^2 : AC' :: \overline{AD}^2 : AD' :: \overline{BF}^2 : BF' :: \overline{AB}^2 : AB;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème XI.

Fig. 110. **238**. *Dans tout triangle, le carré d'un côté quelconque* AB *est égal à la somme des carrés des deux autres* AC *et* BC, *augmentée ou diminuée du double produit de l'un de ces deux côtés* BC, *par la projection* CI *de l'autre* AC *sur lui, selon que l'angle* C *opposé au premier côté* AB *est obtus ou aigu.*

En effet, pour projeter le côté AC sur CB, nous abaisserons du point A une perpendiculaire AI sur CB, et cette perpendiculaire tombera à droite ou à gauche du point C, selon que l'angle C sera obtus ou aigu, sans quoi le triangle AIC aurait un angle obtus et un angle droit, ce qui est absurde. Cela posé, dans le triangle rectangle ABI nous avons (**233**, 4°) :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2.$$

Mais $BI = BC \pm CI$, suivant que l'angle C est obtus ou aigu ; or on démontre, dans tous les traités d'algèbre, que le carré de la somme ou de la différence de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités, augmentée ou diminuée de leur double produit : donc

$$\overline{BI}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CI}^2 \pm 2BC.CI.$$

Substituant cette valeur de $\overline{BI}^2$ dans celle de $\overline{AB}^2$, il viendra

$$\overline{AB}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CI}^2 \pm 2BC.CI.$$

Mais AI et CI sont les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle ACI : donc la somme de leurs

carrés fait $\overline{AC}^2$; remplaçant donc, dans l'égalité précédente, $\overline{AI}^2 + \overline{CI}^2$ par $\overline{AC}^2$, on aura enfin

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \pm 2BC.CI,$$

ce qui démontre le théorème énoncé : car le signe supérieur se rapporte, comme nous l'avons observé, au cas où l'angle C est obtus, et le signe inférieur à celui où il est aigu.

Remarquons que, dans la figure **111**, BI est égal à CI — BC, et non pas à BC — CI; mais son carré n'en est pas moins $\overline{CI}^2 + \overline{BC}^2 - 2CI.BC$. Fig. 111.

239. Corollaire. Le théorème précédent montre que *le carré d'un côté quelconque d'un triangle est plus grand ou plus petit que la somme des carrés des deux autres, selon que l'angle qui lui est opposé est obtus ou aigu*. Il suit de là, et en appliquant le principe du n° **93**, que,

1° *Si le carré du plus grand côté d'un triangle surpasse la somme des carrés des deux autres, l'angle opposé sera obtus;*

2° *Si le carré du plus grand côté d'un triangle est moindre que la somme des carrés des deux autres, l'angle opposé sera aigu, et ainsi le triangle sera acutangle* (**155**).

Exemple. Les trois côtés d'un triangle valent respectivement 5^m, 7^m et 8^m : de quelle espèce est ce triangle? Le carré de 5 est 25; celui de 7 est 49, leur somme 74 est plus grande que 64, qui est le carré du troisième côté : donc le triangle est acutangle.

3° *Si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres, l'angle opposé sera droit, et le triangle sera rectangle.* Ainsi le triangle dont les trois côtés contiendraient respectivement 3, 4 et 5 fois l'unité linéaire, serait rectangle.

Théorème XII.

240. *Dans tout triangle*, ABC, *la somme des carrés de deux côtés* AB *et* AC *est égale au double du carré* Fig. 112.

de la moitié du troisième, plus le double du carré de la droite qui joint le milieu de ce côté au sommet opposé A.

Abaissons, en effet, du sommet A la perpendiculaire AI sur le côté opposé BC, ce qui déterminera les projections BI et IC des deux autres côtés AB et AC sur cette base. Alors, d'après le théorème du n° **238**, les triangles BDA et CDA nous donneront respectivement :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DI,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DI.$$

Mais CD = BD : ainsi, en ajoutant ces deux égalités membre à membre, nous aurons :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2,$$

ce qui démontre notre théorème.

* **241**. Corollaire. Si l'on fait mouvoir le point A de manière que la somme des carrés de ses distances aux points B et C reste constante, sa distance au milieu D de BC restera constante. Donc *le lieu géométrique de tous les points qui sont tels que la somme des carrés de leurs distances à deux points donnés* B *et* C *est égale à* m^2 *est une circonférence dont le centre est le milieu* D *de* BC *et dont le rayon est égal à* $\sqrt{\frac{m^2}{2} - BD^2}$. Pour construire ce lieu, on prendra

Fig. 113. sur BC une longueur BM = m ; on élèvera au point M une perpendiculaire MN = m, puis on coupera la perpendiculaire élevée en C par un arc décrit du point B comme centre, avec BN pour rayon, et en tirant enfin, par le point D, une perpendiculaire à AB jusqu'à la rencontre de BP, on aura le rayon de la circonférence cherchée. On voit, en effet, que $\overline{BP}^2$ ou $\overline{BN}^2 = 2m^2$ (**234**, 4°), par suite $\overline{CP}^2 = 2m^2 - \overline{BC}^2$, d'où $4\overline{AD}^2 = 2m^2 - 4\overline{BD}^2$, car CP et BC sont les doubles respectifs de AD et de BD (**225**); donc enfin

$$AD = \sqrt{\frac{m^2}{2} - \overline{BD}^2}.$$

Théorème XIII.

242. *Dans tout triangle* ABC, *la différence des carrés de deux côtés* AB *et* AC *est égale au double du troisième* BC *multiplié par la projection sur ce troisième côté de la droite, qui joint son milieu au sommet opposé* A. Fig. 112.

En effet, si on retranche membre à membre les deux équations

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DI,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DI,$$

il viendra

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 4BD.DI,$$

car $BD = CD$; mais $4BD.DI = 2BC.DI$, donc enfin

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2BC.DI,$$

ce que nous voulions démontrer.

***243.** Corollaire. Si le point A se meut de telle manière que la différence des carrés de ses distances aux points B et C reste constante, sa projection sur BC restera la même. Donc *le lieu géométrique de tous les points qui sont tels que la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés* B *et* C *est égale à* n^2, *est le système des perpendiculaires menées sur* BC *à une distance de son milieu égale à* $\frac{n^2}{2BC} = \frac{n^2}{4.BD}$, car les points dont il s'agit ne doivent pas être plus près de l'un des points B et C que de l'autre. En conséquence, on élèvera au point D une perpendiculaire DE égale à $\frac{n}{2}$; on mènera EF perpendiculaire à BE, et il ne restera plus qu'à prendre DF′ égale à DF et à mener par les points F et F′ des parallèles à DE. On voit, en effet, que $\overline{DE}^2 = BD.DF$ ou $\frac{n^2}{4} = BD.DF$, d'où enfin $DF = \frac{n^2}{4BD}$. Fig. 114.

Théorème XIV.

244. *La somme des carrés des quatre côtés d'un*
Fig. 115. *quadrilatère quelconque* ABCD *est égale à la somme des carrés de ses diagonales augmentée du carré du double de la droite* IK, *qui joint leurs milieux.*

Joignons, en effet, le milieu I de l'une de ces diagonales avec les deux sommets opposés B et C. Les deux triangles ABD et ACD donneront respectivement :

$$\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=2\overline{BI}^2+2\overline{AI}^2,$$
$$\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{CI}^2+2\overline{AI}^2:$$

donc, en additionnant ces deux égalités membre à membre, il viendra :

$$\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BI}^2+2\overline{CI}^2+4\overline{AI}^2 .... (1).$$

Or, dans le triangle BIC, la droite IK va du sommet I au milieu du côté opposé BC; nous aurons donc :

$$\overline{BI}^2+\overline{CI}^2=2\overline{IK}^2+2\overline{BK}^2,$$

et par conséquent

$$2\overline{BI}^2+2\overline{CI}^2=4\overline{IK}^2+4\overline{BK}^2;$$

donc, en substituant dans l'égalité (1), il viendra :

$$\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=4\overline{IK}^2+4\overline{BK}^2+4\overline{AI}^2.$$

Mais $4\overline{IK}^2$ est le carré de 2IK; $4\overline{BK}^2$ est celui de 2BK, c'est-à-dire de BC, et, par la même raison, $4\overline{AI}^2=\overline{AD}^2$: nous aurons donc enfin :

$$\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=(2IK)^2+\overline{BC}^2+\overline{AD}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

245. Corollaire. Si le quadrilatère ABCD était un parallélogramme, ses diagonales se couperaient en deux parties égales, de sorte que la droite qui joindrait leurs milieux serait nulle. On voit donc que *dans tout parallélogramme la somme des carrés des côtés est égale à celle des carrés des diagonales.*

Théorème XV.

246. *Dans tout quadrilatère inscrit* ABCD *le produit des diagonales* AC, BD, *est égal à la somme des produits des côtés opposés* AB *et* CD, AD *et* BC (¹). Fig. 116.

Je fais au point B l'angle ABI = CBD, et je forme ainsi les deux triangles équiangles ABI et CBD : car l'angle BAC est égal à BDC comme inscrit dans le même segment BADC ; ainsi ils ont deux angles égaux chacun à chacun ; donc leurs côtés homologues sont proportionnels : donc

$$AB : BD :: AI : CD;$$

d'où l'on tire, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens :

$$AB.CD = AI.BD.$$

Les triangles IBC et ABD sont aussi équiangles : car les angles IBC et ABD étant composés de deux angles égaux chacun à chacun, et d'un angle commun IBD, sont égaux ; de plus les angles BCI et BDA sont égaux comme inscrits dans le même segment BCDA : donc on a la proportion :

$$BC : BD :: CI : AD;$$

d'où l'on tire :

$$BC.AD = CI.BD.$$

Ajoutons cette égalité à la précédente, et il viendra, en mettant BD en facteur commun :

$$AB.CD + BC.AD = (AI + CI)BD = AC.BD,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(¹) On attribue ce théorème à l'astronome *Ptolémée*.

CHAPITRE II.

DES POLYGONES SEMBLABLES.

247. *On appelle* TRIANGLES SEMBLABLES *deux triangles qui ont les côtés proportionnels.* Il existe toujours de pareils triangles, car si a, b, c sont les trois côtés d'un triangle et que a soit le plus grand, on aura $a<b+c$, et partant $na<nb+nc$, quelle que soit la quantité n : donc on pourra toujours construire un triangle dont les côtés soient na, nb et nc, puisque la plus grande de ces trois lignes est plus petite que la somme des deux autres (**209**).

Théorème I.

Fig. 103. **248.** *Deux triangles semblables* ABC *et* A′B′C′ *sont équiangles entre eux.*

Supposons les côtés AB, AC et BC proportionnels aux côtés respectifs A′B′, A′C′ et B′C′, je dis que les angles A et A′, B et B′, C et C′ sont égaux. Prenons en effet AD = A′B′, AF = A′C′ et joignons DF. Cette droite coupera donc les côtés AB et AC en parties proportionnelles, et sera par conséquent parallèle à BC; ainsi le triangle ADF sera équiangle avec ABC, de sorte que si l'on démontre qu'il est égal à A′B′C′ notre théorème sera démontré. Pour y parvenir, je mène FG parallèlement à AB; cette droite coupera les côtés AC et BC en parties proportionnelles, et comme BG = DF (**174**), on aura la proportion

$$AC : AF :: BC : DF :$$

mais on a, par hypothèse,

$$AC : A'C' :: BC : B'C' ;$$

donc puisque AF = A′C′, ces deux proportions ont trois termes correspondants égaux, et ainsi leurs qua-

trièmes termes DF et B′C′ sont égaux. Il s'ensuit que le triangle A′B′C′ est égal à ADF (**166**), et par conséquent équiangle avec le triangle ABC.

Théorème II.

249. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils sont équiangles entre eux.*

En effet, nous avons prouvé (**223**) que deux pareils triangles avaient leurs côtés homologues proportionnels.

Théorème III.

250. *Deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles.*

En effet, nous avons vu que deux angles dont les côtés sont parallèles, sont égaux ou supplémentaires (**73**); de sorte que si les triangles ne sont pas équiangles, il ne pourra se présenter que les trois cas suivants :

1° Les trois angles de l'un des triangles seront supplémentaires de ceux de l'autre; mais alors la somme de leurs six angles vaudra six droits, ce qui ne se peut (**148**).

2° Deux angles de l'un seront supplémentaires de deux angles de l'autre, le troisième étant égal de part et d'autre; mais alors la somme des six angles surpassera encore quatre droits, ce qui est absurde.

3° Un angle de l'un des triangles sera supplément d'un angle du second, les deux autres angles du premier étant respectivement égaux aux deux autres du second; mais alors la somme des angles de l'un ne sera pas égale à celle des angles de l'autre, à moins que les deux angles supplémentaires ne soient droits, auquel cas les deux triangles seront équiangles.

Donc les deux triangles sont équiangles, et partant semblables (**249**).

Théorème IV.

251. *Deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés sont respectivement perpendiculaires.*

La démonstration est la même que la précédente.

252. Scholie. Remarquez avec soin que dans ces deux derniers cas de similitude de deux triangles, les côtés homologues sont ceux qui sont respectivement parallèles ou perpendiculaires : car deux pareils côtés se trouvent précisément opposés à deux angles dont les côtés sont eux-mêmes parallèles ou perpendiculaires, c'est-à-dire à deux angles égaux.

Théorème V.

253. *Deux triangles* ABC *et* A′B′C′ *sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal* $A = A'$ *compris entre côtés proportionnels* AB *et* A′B′, AC *et* A′C′.

Prenons en effet $AD = A'B'$, $AF = A'C'$ et joignons DF. Le triangle ADF sera égal à A′B′C′ (**159**) et semblable à ABC (**249**), puisque la droite DF coupant les côtés AB et AC en parties proportionnelles sera parallèle à BC : donc A′B′C′ est semblable à ABC.

254. *On appelle* POLYGONES SEMBLABLES *deux polygones qui sont composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés* (¹).

(¹) C'est-à-dire que les deux angles dont le sommet commun est à l'une des extrémités de la droite qui assemble deux triangles du premier polygone, sont homologues de ceux dont le sommet commun est à l'une des extrémités de la droite qui assemble les deux triangles semblables du second. Ainsi, pour construire sur la droite A′B′, homologue de AB, une suite de
Fig. 117. triangles semblables à ceux du polygone ABCDEFG, et semblablement placés, on fera sur cette droite un triangle semblable à ABD; puis sur B′D′ un triangle semblable à BDC, avec cette condition, que l'angle C′B′D′ soit égal à CBD, et que B′D′C′ soit égal à BDC, et ainsi de suite (249).

Théorème VI.

255. *Deux polygones semblables ont leurs angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels* (les côtés homologues sont ceux qui sont adjacents à des angles égaux).

Soient les deux polygones semblables ABCDEFG et A′B′C′D′E′F′G′, de sorte que les triangles ABD et A′B′D′, BDC et B′D′C′, ADE et A′D′E′.... sont semblables et semblablement disposés. Les quatre angles dont le sommet est en A, sont donc égaux aux quatre angles qui ont leur sommet au point A′ (**248**); donc l'angle A est égal à l'angle A′; par une raison semblable l'angle B est égal à l'angle B′, et ainsi de suite. Donc déjà les deux polygones sont équiangles entre eux. Fig. 117.

En second lieu, la similitude des triangles ABD et A′B′D′, BDC et B′D′C′, ADE et A′D′E′,..... donne (**247**)

AB:A′B′ :: BD:B′D′ :: AD:A′D′,
BD:B′D′ :: BC:B′C′ :: CD:C′D′,
AD:A′D′ :: ED:E′D′ :: AE:A′E′,
Etc.;

donc, parce que chacune de ces suites est liée avec une autre par un rapport commun, on aura

AB:A′B′ :: BC:B′C′ :: CD:C′D′ :: ED:E′D′ :: etc.

256. Corollaire. *Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et semblablement placés* (**200** et **201**).

257. Scholie. Nous avons vu que deux triangles ne pouvaient être équiangles sans avoir leurs côtés homologues proportionnels et réciproquement; mais cette propriété appartient exclusivement aux figures qui ont trois côtés. Ainsi, par exemple, le rectangle et le carré sont équiangles, mais leurs côtés ne sont point proportionnels; de même une losange et un carré ont leurs côtés proportionnels, et ils ne sont pas équiangles.

Mais on peut le démontrer généralement de la manière suivante:

Fig. 118. Menons, en effet, dans le polygone quelconque ABCDE, la parallèle D′E′ au côté DE: il est clair que le polygone ABCD′E′ est équiangle à ABCDE, mais que leurs côtés homologues ne sont pas proportionnels.

Actuellement décrivons deux arcs des points A et C comme centres, avec les rayons respectifs AB et CB, et joignons B′A et B′C: les deux polygones ABCDE et AB′CDE auront leurs côtés égaux chacun à chacun, et par conséquent proportionnels, et cependant leurs angles homologues ne sont pas tous égaux.

Théorème VII.

258. *Deux polygones sont semblables lorsqu'ils ont tous leurs côtés moins un proportionnels et que les angles compris par ces côtés sont égaux chacun à chacun.*

Fig. 117. Supposons que les côtés du premier polygone ABCDEFG, à l'exception de AG, soient proportionnels aux côtés de même nom dans le second, et que les angles

B et B′, C et C′, D et D′, E et E′, F et F′

soient égaux. Je partage les deux polygones en triangles par des droites qui joindront les sommets homologues. On voit d'abord que les deux triangles BCD et B′C′D′ ont un angle égal C = C′, compris entre côtés proportionnels BC et B′C′, CD et C′D′ : donc ils sont semblables; donc l'angle CBD = C′B′D′ et

BC : B′C′ :: BD : B′D′;

mais on a, par hypothèse, l'angle ABC = A′B′C′ et

BC : B′C′ :: BA : B′A′;

donc l'angle ABD = A′B′D′ et

BD : B′D′ :: BA : B′A′:

Donc les deux triangles ABD et A′B′D′ sont sembla-

bles (253). Par suite l'angle $BDA = B'D'A'$ et comme l'angle $CDB = C'D'B'$ à cause de la similitude des triangles BCD et $B'C'D'$, et que l'angle $D = D'$, par hypothèse, on voit que l'angle $ADE = A'D'E'$. Mais il résulte de la similitude de nos triangles que

$$CD : C'D' :: DB : D'B' :: DA : D'A';$$

et comme par hypothèse

$$CD : C'D' :: DE : D'E',$$

on aura

$$DA : D'A' :: DE : D'E'.$$

Donc encore le triangle ADE est semblable à $A'D'E'$ (253), et ainsi de suite. Donc les deux polygones sont semblables.

Théorème VIII.

259. *Deux polygones sont semblables lorsqu'ils ont tous leurs angles moins un égaux chacun à chacun et que les côtés adjacents à ces angles sont proportionnels.*

Il n'y a de différence entre la démonstration de ce théorème et la précédente, qu'en ce que les deux derniers triangles seront semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun, au lieu d'avoir un angle égal compris entre côtés proportionnels.

260. Corollaire. 1° *Tous les carrés sont semblables; 2° deux losanges qui ont un angle égal; 3° deux rectangles dont deux côtés adjacents sont proportionnels; 4° deux parallélogrammes qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables.*

261. Scholie. Si n représente le nombre des côtés d'un polygone, il faudra pour exprimer qu'il est semblable à un autre $(n-2)+(n-2)=(2n-4)$ ou $(n-1)+(n-3)=(2n-4)$ conditions, suivant qu'on s'appuiera sur le théorème du n° 258 ou sur celui du n° 259.

262. *On appelle* points homologues *deux points*

tels qu'en les joignant aux extrémités de deux côtés homologues on forme deux triangles semblables et semblablement placés. Les droites, dont les extrémités sont des points homologues, sont dites DROITES HOMOLOGUES.

Théorème IX.

263. *Dans deux polygones semblables, les droites homologues sont proportionnelles aux côtés homologues de ces polygones.*

Supposons que les triangles PFE et P′F′E′, QBC et Q′B′C′ soient semblables et semblablement placés, les points P et P′, Q et Q′ seront homologues, et je dis que les droites homologues PQ et P′Q′ sont proportionnelles aux côtés homologues BC et B′C′. En effet, dans les deux polygones PFEDCQP et P′F′E′D′C′Q′P′, tous les côtés moins un sont proportionnels, et les angles compris par ces côtés sont égaux chacun à chacun; donc ces polygones sont semblables (**258**), et par conséquent (**255**)

$$PQ : P'Q' :: DC : D'C' :: BC : B'C'.$$

Théorème X.

Fig. 119. **264.** *Deux polygones* ABCDE *et* A′B′C′D′E′ *sont semblables lorsqu'en joignant les extrémités* F *et* G, F′ *et* G′ *de deux droites* FG *et* F′G′ *avec tous les sommets de ces polygones, les triangles ainsi formés sont semblables chacun à chacun et semblablement placés.*

En effet, on peut regarder leurs côtés AB et A′B′, BC et B′C′, ... comme des droites homologues par rapport aux deux triangles semblables AFG et A′F′G′; donc déjà tous ces côtés sont proportionnels. On voit ensuite que les triangles ABF et A′B′F′ étant semblables comme ayant un angle F = F′ compris entre côtés proportionnels FA et F′A′, FB et F′B′ (**253**), l'angle FBA = F′B′A′. Par une raison semblable l'angle GBC = G′B′C′, et comme l'angle FBG = F′B′G′,

il s'ensuit que l'angle total B = B'; on prouverait de même que tous les autres angles C et C', D et D',.... des deux polygones sont égaux, et qu'en conséquence les deux polygones sont semblables (**258**).

Théorème XI.

265. *Les périmètres de deux polygones semblables sont proportionnels aux côtés homologues de ces polygones.*

En effet, ces deux polygones ont leurs côtés homologues proportionnels : donc on peut former avec ces côtés une suite de rapports égaux, dont les antécédents seront les côtés du premier, et les conséquents les côtés homologues du second ; donc on en déduira, d'après un principe connu d'arithmétique, que

La somme de tous les côtés du premier, ou son périmètre, *est à* la somme de tous les côtés du second, ou son périmètre, *comme* un côté du premier *est* au côté homologue du second.

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LES LIGNES PROPORTIONNELLES ET SUR LES POLYGONES SEMBLABLES.

Problème I.

266. *Partager une droite donnée* AB *en parties proportionnelles à des droites données* p, q, r. Fig. 120.

Menons par le point A une droite indéfinie AX, et prenons sur cette droite des parties AP, PQ, QR, respectivement égales aux lignes données p, q, r. Il est clair maintenant que si nous joignons RB, et que par les points P et Q nous menions des parallèles à RB, ces droites diviseront AB proportionnellement aux lignes AP, PQ, QR (**216**), et par conséquent aux

lignes données *p, q, r*. Mais, au lieu de mener ces parallèles par l'un des procédés donnés au n° **151**, nous emploierons le suivant, qui est susceptible d'un plus grand degré d'exactitude. Joignez RB, et coupez cette droite en R′ par un arc décrit du point A comme centre, avec le rayon AR. Reportez ensuite les longueurs AP et AQ sur AR′, et joignez PP′ et QQ′. Ces droites seront parallèles à RR′ (**218**) : car les points P et P′, Q et Q′, divisent respectivement AR et AR′ en parties proportionnelles.

Fig. 121. **267**. Corollaire. Il suit de là que si les lignes *p, q, r*, eussent été égales, la droite AB eût été partagée en parties égales. Ainsi, pour partager une droite donnée AB en cinq parties égales, par exemple, on mènera, par l'une de ses extrémités A, une droite indéfinie quelconque AX, sur laquelle on portera une ouverture arbitraire de compas autant de fois que l'on voudra avoir de parties dans AB. On joindra le dernier point de division avec le point B, et il ne s'agira plus que de mener par les autres points de division des parallèles à la ligne de jonction, ce qui s'exécutera par la méthode que nous venons d'indiquer. Nous observerons seulement de faire l'angle BAX peu différent de la moitié d'un droit, et de prendre l'ouverture de compas à peu près double des parties demandées de AB, parce qu'avec ces précautions les parallèles ne couperont pas AB trop obliquement, et les points qui doivent déterminer leur direction ne seront pas trop rapprochés.

Fig. 101. On peut encore employer la méthode suivante pour partager une droite donnée en parties égales. Portez sur une droite indéfinie BY autant de fois une même ouverture de compas que vous voulez de parties dans la droite donnée *a*; et sur BF construisez un triangle équilatéral BAF (**213**); vous prendrez AB′ et AF′ égaux à *a*, et vous joindrez B′F′. Cette droite sera parallèle à BF (**219**) : car elle divise AB et AF en parties proportionnelles; de plus, elle sera égale à *a*, puis-

que les triangles ABF et AB′F′, étant équiangles, ont leurs côtés homologues proportionnels (**223**). Mais le premier est équilatéral : donc le second l'est aussi; donc B′F′ $= a$; donc si l'on joint AC, AD et AE, la droite a sera divisée en parties égales aux points C′, D′ et E′.

Remarquons que les droites issues de A seront d'autant mieux déterminées que ce point sera plus éloigné de BY, c'est-à-dire que l'ouverture de compas que l'on a portée sur BY sera plus grande.

Remarquons encore que cette méthode a l'inconvénient d'effectuer la division sur une droite égale à a, et non sur cette ligne même. On pourrait, il est vrai, modifier la construction de manière à diviser immédiatement la droite a, mais aussi on serait exposé à des erreurs plus grandes; cependant, si l'on devait partager plusieurs droites données en un même nombre de parties égales ou proportionnelles à d'autres droites données, c'est à la méthode du triangle équilatéral que l'on devrait avoir recours.

Problème II.

268. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données a, b, c*, c'est-à-dire trouver une droite x, qui forme le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient les lignes a, b, c, de sorte que l'on ait Fig. 122.

$$a : b :: c : x.$$

a étant plus grand que c, on pourra regarder les deux termes a et b du premier rapport comme deux côtés d'un triangle, et les deux termes c et x du second comme deux de leurs parties correspondantes, déterminées par une parallèle au troisième côté de ce triangle. En conséquence, on tracera deux droites indéfinies OY et OZ sous un angle quelconque, mais que, pour plus d'exactitude, dans les constructions, on ne fera

pas plus grand qu'un droit. On prendra sur ses côtés des parties $OA = a$, et $OB = b$, puis sur le côté OA une seconde partie $OC = c$. Menant CX parallèle à AB, on obtiendra la quatrième proportionnelle demandée OX.

Fig. 123. On pourra encore regarder les antécédents a et c comme les deux parties d'un même côté, et alors les conséquents b et x seront les parties correspondantes de l'autre côté : ce qui conduira à la construction exécutée dans la figure 123, où BX est la ligne demandée.

269. Les théorèmes des nos **228** et **230** fournissent chacun une nouvelle solution du problème précédent. Veut-on s'appuyer sur la propriété des sécantes, on dira, en considérant la proportion

$$a : b :: c : x :$$

c étant plus grand que b, cette droite est une sécante, et b sa partie extérieure, tandis que a et la ligne inconnue x sont l'autre sécante et sa partie extérieure.

Fig. 124. En conséquence, je prends, sur une droite $OC = c$, une partie OB égale à b; je mène par le point O une droite quelconque $OA = a$; et la ligne OX, déterminée en faisant passer une circonférence par les trois points A, B, C, résoudra le problème.

Si l'on veut s'appuyer sur le théorème du n° **230**, on remarquera que les deux moyens b et c de la proportion

$$a : b :: c : x$$

sont les deux parties d'une corde, et les deux extrêmes a et x les deux parties de l'autre. On tirera donc deux droites qui se croisent en O; on prendra sur l'une $OB = b$ et $OC = c$; et $OA = a$ sur l'autre; puis on fera passer une circonférence par les trois points A, B, C, et OX sera la quatrième proportionnelle.

270. Corollaire. Si les deux lignes a et b étaient égales, la ligne inconnue x serait déterminée par la proportion

$$a : b :: b : x,$$

et alors on l'appellerait *une troisième proportionnelle* aux droites a et b. On obtiendra évidemment cette troisième proportionnelle par la construction donnée au n° **268**.

271. Les propositions démontrées aux n^{os} **236**, 1° et 2°, et **229**, fournissent d'autres moyens de trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données a et b, moyens qui sont utiles dans un grand nombre de cas.

Nous cherchons une droite x, telle que l'on ait

$$a:b::b:x:$$

ainsi b doit être une moyenne proportionnelle entre a et x. Il suit de là, 1° qu'on peut regarder (**229**) b comme une tangente, et l'une des deux droites a et x comme une sécante dont la partie extérieure serait l'autre droite. En conséquence, on tirera sous un angle quelconque deux droites $OA = a$, $OB = b$, et l'on Fig. 125.
décrira une circonférence qui touche OB en B, et qui passe par le point A (**134**) : OX sera la troisième proportionnelle demandée;

2° Que b peut être la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, et a et x seront les deux segments de cette hypoténuse. Ainsi l'on prendra sur une droite indéfinie une partie $OA = a$; on élèvera au point O Fig. 126.
une perpendiculaire $OB = b$; on joindra AB, et l'on mènera BX perpendiculaire sur AB : OX résoudra le problème.

3° Enfin on peut regarder b comme une corde dont x serait la projection sur le diamètre a, si $a > b$, et dont a serait, au contraire, la projection sur le diamètre x, si $a < b$.

Dans le premier cas, on décrira sur $OA = a$, comme Fig. 127.
diamètre, une demi-circonférence; on mènera une corde $OB = b$, et l'on abaissera de B la perpendiculaire BX sur le diamètre.

Dans le second cas, on élèvera à l'extrémité O d'une Fig. 125.

droite $OA = a$ une perpendiculaire que l'on coupera par un arc décrit de A comme centre, avec b pour rayon; on joindra AB, et l'on tirera BX perpendiculairement à cette droite. Dans les deux cas, OX résoudra le problème.

Problème III.

Fig. 128. **272**. *Par un point* O *donné sur le plan d'un angle* BAC, *mener une sécante telle que les deux parties de cette droite comprises entre ce point et les côtés* AB *et* AC *de l'angle soient proportionnelles à deux lignes données p et q.*

Supposons le problème résolu, et soit OCB la sécante demandée. On aura donc

$$OB : OC :: p : q.$$

Or, si l'on mène par le point O, OD parallèle à AC jusqu'à la rencontre de BA, prolongée s'il est nécessaire, on aura pareillement :

$$BD : AD :: BO : CO;$$

Donc, à cause du rapport commun,

$$BD : AD :: p : q.$$

Ainsi la ligne inconnue BD est une quatrième proportionnelle aux trois droites connues q, p et AD. On cherchera donc cette quatrième proportionnelle, en exécutant la construction indiquée sur la figure; et en faisant passer une sécante par son extrémité B et par le point O le problème sera résolu.

Problème IV.

273. *Par un point* A *donné sur le plan de deux*
Fig. 129. *droites* BB′ *et* CC′ *qu'on ne peut prolonger, mener une droite qui aille concourir avec elles.*

Tirez deux parallèles quelconques BC et B′C′; joignez AB et AC, puis menez-leur des parallèles B′A′ et C′A′ par les points B′ et C′. La droite AA′ résoudra le problème (**223** et **226**).

PROBLÈME V.

274. *Mener une tangente commune à deux circonférences données.*

1re MÉTHODE. Ce problème admet évidemment quatre solutions; savoir : deux tangentes *externes* et deux tangentes *internes*. Supposons-le résolu, et soit AB une tangente externe. Joignons OA et O′B : ces droites Fig. 130. seront perpendiculaires sur cette tangente : donc, si l'on mène par le centre O′ la parallèle O′C à AB, la partie AC ainsi déterminée sur le rayon AO sera égale à O′B (**175**), de sorte que OC sera égale à la différence des rayons des deux circonférences; mais O′C est perpendiculaire sur OA (**65**) : donc elle est tangente à la circonférence que l'on décrirait avec le rayon OC (**84**).

Décrivez donc une circonférence du point O comme centre avec un rayon OD égal à la *différence* de ceux des deux circonférences données; menez de O′ deux tangentes à cette circonférence, et joignez le centre O avec les points de contact C et C′; menant enfin des tangentes aux points A et A′, où ces droites OC et OC′ vont couper la circonférence O, on aura les deux tangentes externes AB et A′B′.

On verra de la même manière que, pour trouver les deux tangentes internes, il faudra décrire du centre O une circonférence avec la *somme* OG des rayons des deux circonférences données, et achever la construction comme précédemment.

Il est facile de voir que les deux tangentes externes vont se couper sur la droite qui joint les centres, et qu'il en est de même pour les deux tangentes internes.

275. 2e MÉTHODE. Il suit immédiatement du n° **226** que *les sécantes qui, comme* AA′ *ou* AA″, *passent par* Fig. 131. *les extrémités de deux rayons parallèles et dirigés dans le même sens ou en sens contraires, vont concourir en un même point* C *ou* C′ *de la droite* OO′ *qui joint leurs centres.* Une tangente commune aux

deux circonférences O et O′ va donc passer aussi par l'un ou l'autre de ces points. Ainsi, pour mener une tangente commune aux deux circonférences données, on tirera un rayon quelconque OA et un diamètre A′O′A″ parallèle à ce rayon : on joindra le point A avec chacun des points A′ et A″ par des droites qui couperont OO′ en C et en C′, et il ne s'agira plus que de mener de chacun de ces points des tangentes à l'une des deux circonférences données.

Remarquons que cette 2e méthode deviendrait impraticable si les rayons des deux circonférences données étaient presque égaux, car alors le point C se trouverait très-éloigné de O′. On aurait alors recours à la première.

Problème VI.

276. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données, a et b.*

Nous pouvons, pour résoudre ce problème, nous appuyer sur les propositions démontrées aux nos **236**, 1° et 2°, et **229**. Si l'on veut employer la première, on observera que la droite demandée sera la perpendiculaire abaissée d'un des points de la circonférence sur le diamètre, et que a et b seront les deux segments de ce diamètre. En conséquence, on portera les deux
Fig. 132. droites données a et b à la suite l'une de l'autre de A en O et de O en B; on décrira une demi-circonférence sur AB, comme diamètre, et l'on élèvera au point O la perpendiculaire OX sur AB. Cette droite OX résoudra le problème.

Veut-on s'appuyer sur la propriété de la corde (**236**, 2°), on dira : La droite demandée sera la corde; la plus grande, a, des deux droites données, sera le diamètre; et l'autre, b, sera la projection de cette corde sur ce diamètre. En conséquence, on prendra sur une droite indéfinie deux parties $OA=a$ et $OB'=b$; sur OA, comme diamètre, on décrira une demi-circonférence, on élèvera au point B′ une perpendiculaire

B'X' sur OA, et la corde OX' sera la moyenne proportionnelle demandée.

Enfin, si l'on veut faire usage de la propriété de la tangente (**229**), on dira : La droite demandée doit être la tangente, a la sécante, et b sa partie extérieure (on suppose $a > b$). On prendra donc, sur une droite $OA = a$, une partie $OB = b$; on fera passer une circonférence par les deux points A et B; et en menant la tangente OX à cette circonférence (**156**, 2° et **159**), le problème sera résolu.

PROBLÈME VII.

277. *Partager une droite donnée* AB *en moyenne et extrême raison*, c'est-à-dire en deux segments tels que l'un d'eux soit moyen proportionnel entre la droite donnée et l'autre segment. Le segment qui doit être moyen proportionnel est évidemment le plus grand. Fig. 133.

Supposons que la droite AB soit divisée au point X en moyenne et extrême raison, et que AX soit le plus grand des deux segments; on aura donc :

$$AB : AX :: AX : BX.$$

Comme cette proportion contient deux inconnues AX et BX, il faut tâcher d'en faire évanouir une. Pour cela, nous lui appliquerons ce principe d'arithmétique, que dans toute proportion la somme des deux premiers termes est à celle des deux derniers comme le premier est au troisième, et il viendra :

$$AB + AX : AB :: AB : AX :$$

car $AB = AX + BX$. Or, si l'on regarde cette proportion comme résultant du théorème du n° **229**, AB sera la tangente, AB + AX la sécante, et AX sa partie extérieure; de sorte que AB sera égal à la partie intérieure de cette sécante, ce qui aura lieu si le diamètre est égal à AB, et que la sécante passe par le centre. En conséquence, à l'extrémité B de AB on élèvera une perpendiculaire BO égale à la moitié de cette droite, du point

O comme centre, avec le rayon OB, on décrira une circonférence qui sera ainsi tangente à AB, et l'on mènera une sécante par les points A et O; rabattant enfin AC sur AB, le problème sera résolu.

Si l'on veut démontrer cette construction *à posteriori*, on dira : La tangente AB est moyenne proportionnelle entre la sécante AD et sa partie extérieure AC; ainsi

$$AD : AB :: AB : AC \dots\dots\dots\dots\dots (1):$$

d'où *dividendo* :

$$AD - AB : AB - AC :: AB : AC.$$

Or, puisque $AB = CD$, et que $AC = AX$, on voit que $AD - AB = AC = AX$, et que $AB - AC = BX$; on aura donc, en remplaçant :

$$AX : BX :: AB : AX,$$

ou, en mettant les extrêmes à la place des moyens :

$$AB : AX :: AX : BX,$$

proportion qui prouve que AB est divisée au point X en moyenne et extrême raison.

278. Scholie. Si dans la proportion (1) on remplace AB par son égale CD, il viendra :

$$AD : CD :: CD : AC.$$

Ainsi, la sécante AD est aussi divisée au point C en moyenne et extrême raison.

Cette remarque fournit le moyen de retrouver la droite qui a été partagée en moyenne et extrême raison, lorsque l'on connaît le plus grand de ses deux segments. Il suffit, pour cela, d'effectuer la construction nécessaire pour partager ce segment lui-même en moyenne et extrême raison; et la sécante résout le problème.

Remarquons encore que si l'on voulait partager AX en moyenne et extrême raison, il n'y aurait qu'à porter BX sur AX.

Problème VIII.

279. *Décrire une circonférence qui passe par deux*

points donnés A *et* B *et soit de plus tangente à une droite donnée* CD. fig. 134

Supposons le problème résolu, et soit T le point où la circonférence demandée touche la droite CD. Il est clair que si l'on connaissait ce point, la circonférence serait déterminée (79). Or, si nous prolongeons AB, jusqu'à sa rencontre avec CD en F, la tangente FT sera moyenne proportionnelle entre la sécante FA et sa partie extérieure FB : donc, en cherchant cette moyenne proportionnelle, et la portant sur CD, on déterminera le point de contact T. Comme il n'y a pas de raison pour la porter d'un côté de F plutôt que de l'autre, on prendra aussi FT′ égale à la moyenne proportionnelle, et en faisant passer une première circonférence par T, A et B, et une seconde par T′, A et B, on obtiendra les deux solutions du problème.

Ceci suppose la réciproque du théorème du n° 229; mais il est facile de la démontrer en suivant la règle du n° 48 : ainsi nous ne nous y arrêterons pas.

Si la droite CD était parallèle à AB, la construction précédente serait impossible; mais on observerait qu'en vertu du théorème du n° 89, 2°, la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB irait passer au point de contact, et le déterminerait ainsi.

PROBLÈME IX.

280. *Décrire une circonférence qui, passant par deux points donnés* A *et* B, *soit en outre tangente à une circonférence donnée* O. Fig. 135.

Je décris une circonférence qui passe par les deux points donnés A et B, et qui coupe la circonférence O en deux points C et D. Alors, si du point de section F des deux cordes AB et CD je mène une tangente à la circonférence O, le point T où elle la touchera sera précisément le point de contact de cette circonférence avec celle que l'on demande : car le carré de cette tangente, étant égal au produit FC.FD, le sera aussi au produit FA.FB; et ainsi la circonférence

qui passera par les trois points A, B, T, touchera la droite FT, et par conséquent la circonférence O au point T.

Le problème aura donc deux solutions, puisque du point F on pourra toujours mener deux tangentes à la circonférence O, à moins que l'un des points donnés ne soit intérieur à cette circonférence, et que l'autre ne lui soit extérieur : alors le problème serait impossible. Nous observerons toutefois que si la droite AB était tangente à la circonférence donnée, l'un des points de contact se trouverait sur cette droite, de sorte que la circonférence tangente en ce point se réduirait à la droite AB elle-même (**102**).

Si la perpendiculaire abaissée du centre O sur AB passait par le milieu de cette droite, les deux cordes AB et CD couperaient alors cette droite à angles droits (**97**), et seraient ainsi parallèles : donc les tangentes FT et FT′ leur seraient parallèles et les points de contact T et T′ se trouveraient précisément aux intersections de la circonférence O avec la perpendiculaire dont il s'agit.

Il est facile de voir que le problème du n° **279** est un cas particulier de celui-ci (**102**), en observant que $FT = \sqrt{FA.FB}$.

Problème X.

Fig. 103. **281.** *Construire sur une droite donnée* A′B′, *homologue à* AB, *un triangle semblable au triangle donné* ABC.

Les théorèmes des n^os^ **249** et **253** et la définition du n° **247** peuvent également servir à résoudre ce problème; mais le premier est celui qui en fournit la solution la plus simple : car il suffit de faire aux points A′ et B′ des angles respectivement égaux aux angles A et B.

Problème XI.

Fig. 136. **282.** *Construire sur une droite donnée* A′B′, *homo-*

logue à AB, *un polygone semblable à un polygone donné* ABCDE.

On peut s'appuyer pour résoudre ce problème sur l'un des théorèmes démontrés aux nos **258** et **259**, mais il est plus simple d'en déduire la solution de la définition même des polygones semblables.

En conséquence, on commencera par partager le polygone donné en triangles par des diagonales issues d'un même sommet, si la chose est possible; sinon, on le décomposera en polygones qui jouissent de cette propriété, ce qui ramènera ce second cas au premier. Soit donc ABCDE le polygone proposé décomposé en triangles par les diagonales BD et BE. On construira sur A′B′ un triangle semblable à ABE, en faisant les angles E′A′B′ et A′B′E′ respectivement égaux aux angles EAB et ABE. Alors, pour que les triangles soient semblablement placés dans les deux polygones, il faudra que les angles dont les sommets seront en B′ et en E′ soient respectivement homologues de EBD et de BED. On construira donc sur B′E′ un triangle semblable à BED, qui satisfasse à cette condition, et l'on continuera ainsi de suite.

Si A′B′ = AB, le nouveau polygone sera égal au polygone donné. Voilà donc un nouveau moyen de construire un polygone égal à un autre (**213**).

Problème XII.

283. *Construire un polygone semblable à un polygone donné, et dont le périmètre soit égal à une droite donnée, p.*

Cherchez une quatrième proportionnelle au périmètre du polygone donné ABCDE, à p et à AB, et vous aurez le côté qui doit être homologue à AB dans le polygone cherché (**265**), ce qui vous ramène au problème précédent. Fig. 136.

Problème XIII.

284. *Construire un triangle semblable à un trian-*

Fig. 138. *gle donné* ABC, *et dont les sommets homologues à* A, B *et* C *soient situés respectivement sur les trois circonférences concentriques données* O.

Cherchez un point D tel que ses distances aux trois sommets A, B, C du triangle soient proportionnelles aux rayons respectifs R, R′, R″ des trois circonférences, ce qui sera facile d'après la proposition du n° **222**. Décrivez du point D comme centre, et avec les rayons R, R′, R″ trois circonférences qui couperont les directions DA, DB, DC respectivement en A′, B′, C′, joignez enfin ces points deux à deux, et vous formerez un triangle A′B′C′ semblable à ABC (**250**) et qui sera inscrit au système de trois circonférences égales aux circonférences données. Vous n'aurez donc plus qu'à transporter la seconde figure sur la première, et le problème sera résolu.

Cette méthode est connue sous le nom de *méthode inverse*, et fournit des solutions fort simples de problèmes que l'on ne résoudrait qu'avec beaucoup de peine de toute autre manière.

Problème XIV.

285. *Construire une échelle.*

Une échelle est une ligne droite divisée en parties égales, et l'une de ces parties est ensuite divisée aussi en un certain nombre de parties égales.

Les échelles sont nécessaires pour représenter sur le papier, et dans leur juste proportion, des distances plus grandes que les dimensions de la feuille de papier. Le géographe, l'architecte, le constructeur de machines, placent toujours au bas de leurs dessins une échelle de parties égales qui sert de commune mesure à toutes les distances du pays, à toutes les parties du bâtiment ou de la machine qu'ils y ont représentées.

Dans les cartes de géographie, l'échelle représente ordinairement des myriamètres ou des kilomètres; des décamètres subdivisés en mètres dans les plans topographiques; et enfin des mètres subdivisés en décimè-

tres, en centimètres, et même en millimètres, dans le dessin linéaire.

Dans les plans du cadastre on représente une distance de 2,500 mètres par une ligne d'un mètre ; de sorte que 100^m le sont par une ligne de $\frac{1^m}{25} = 0^m,04$: ainsi il faut diviser en cent parties égales une ligne de 4 centimètres pour pouvoir représenter des mètres. On sent combien le procédé que nous avons indiqué (**267**) serait fécond en erreurs dans le cas actuel, et d'ailleurs les points de division seraient tellement rapprochés qu'il serait difficile de les distinguer. On a heureusement imaginé un procédé connu sous le nom de *méthode des transversales*, qui est aussi simple qu'exact. Nous allons l'appliquer à la construction d'une échelle de 500^m à $\frac{1}{2500}$, dont la plus petite division exprimera ainsi un mètre.

Cent mètres étant représentés par une longueur de 4 centimètres, l'échelle de 500^m aura deux décimètres. On divisera donc une droite AB ayant cette longueur en cinq parties égales. On élèvera à ses deux extrémités deux perpendiculaires indéfinies AC et BD, sur chacune desquelles on portera dix fois une même ouverture de compas. On joindra les points correspondants de ces perpendiculaires deux à deux, et l'on reportera sur CD les divisions de AB, en numérotant ces divisions 0, 100, 200, 300 et 400, et 1, 2, 3, 4...... 9, celles de la droite FE. Cela fait, on tire AE; et il est facile de voir, en comparant des triangles équiangles dont le sommet commun est en A, que la partie de chaque parallèle comprise entre la transversale AE et la droite AC vaut autant de dixièmes de EC qu'il est marqué par celui des numéros de EF qui répond à cette parallèle [1] : de sorte qu'en reportant sur AF et sur CE toutes ces parties de parallèles, Fig. 139.

---

[1] Par exemple, les triangles ECA et AKI donnent la proportion AC : AK :: EC : KI; mais AK est les six dixièmes de AC : donc KI est aussi les six dixièmes de EC.

ces deux droites seront divisées en dix parties égales, dont chacune sera $\frac{1}{50}$ de AB, et représentera ainsi 10 mètres. On placera aux divisions de FA les nos **10**, **20**, **30**.... **90**, et il n'y aura plus qu'à joindre les points de division de AF avec ceux de CE par des transversales, et l'échelle sera construite : car la partie de chaque parallèle comprise entre la transversale GF et EF vaut autant de dixièmes de GE que l'indique le numéro de EF qui se trouve sur cette parallèle. Ainsi la partie qui correspond au n° **3** vaut $\frac{3}{10}$ de GE ou de 10 mètres, c'est-à-dire 3 mètres. Cela posé, si l'on veut figurer sur le plan une distance de 347 mètres, on placera une des pointes d'un compas sur la 7e parallèle à partir de la perpendiculaire numérotée 300, et l'on amènera l'autre pointe à l'intersection de cette parallèle avec la transversale numérotée 40.

Veut-on connaître, au contraire, la longueur d'une droite PQ, on portera sur l'échelle, à partir de la ligne 00, une ouverture de compas égale à cette ligne, ce qui fera connaître cette longueur à moins de cent mètres près. Supposons que PQ soit compris entre 200m et 300m, on fera glisser le compas sur les parallèles successives jusqu'à ce que l'une des pointes étant sur la ligne 200—200, l'autre se trouve sur une des transversales. Si cette transversale est numérotée 30, par exemple, et que l'on soit sur la quatrième parallèle, on en conclura que la ligne PQ vaut 234 mètres.

Si les lignes que l'on doit tracer sur le plan ne dépassent pas 800m, on pourra employer l'échelle d'un millième, c'est-à-dire représenter *un mètre* par *un millimètre* : car 800m le seront alors par une longueur de 8 décimètres, et le papier grand-aigle a 0m,975 de largeur. Les règles de *Kutsch* fourniront alors d'excellentes échelles.

286. Problème a résoudre. 1° *Quel est le lieu de tous les points qui partagent, dans le rapport constant de deux droites p et q, les droites qui joignent*

un point O *avec tous les points d'une circonférence donnée?*

2° *Trouver le lieu de tous les points* M, *tels qu'en joignant chacun d'eux avec un point* A *donné sur le plan d'une circonférence* O, *le produit des distances* AM *et* AB *soit égal au carré d'une droite donnée* k. Fig. 140.

3° *Un point* O *et une droite* AB *étant donnés, trouver le lieu des points* M, *tels qu'en joignant* MO *le produit des distances* OC *et* OM *soit égal au carré d'une droite donnée* k. Fig. 141.

4° *Trouver le lieu de tous les points desquels on peut mener des tangentes égales à deux circonférences données. — Quel est ce lieu si les circonférences se coupent? — Profiter de cette remarque pour le construire, quand elles ne se coupent pas. — Ce lieu se nomme* L'AXE RADICAL *des deux circonférences. — Les axes radicaux de trois cercles concourent en un même point qu'on nomme leur* CENTRE RADICAL.

5° *Trouver le lieu des points d'où deux cercles donnés seraient vus sous le même angle.*

6° *Étant données trois droites qui concourent en un même point, mener par un point donné, une sécante telle que les deux parties interceptées par ces droites soient proportionnelles à deux droites données* p *et* q (méthode inverse).

7° *Mener une sécante qui coupe trois droites données dans un même plan, de manière que les parties interceptées par ces droites soient chacune égales à une longueur donnée.*

8° *Étant données quatre droites situées d'une manière quelconque sur un plan, mener une sécante telle que les trois parties interceptées par ces droites soient proportionnelles à des droites données* p, q, r.

APPENDICE AU LIVRE III.

§. I. *Théorie des transversales.*

Théorème I.

Fig. 142. *287. *Toute transversale* MN *détermine sur les côtés d'un triangle* ABC *six segments tels que le produit* A′B.CB′.AC′ *de trois segments non consécutifs est égal au produit* A′C.B′A.C′B *des trois autres.*

Menons en effet par le sommet A la parallèle AI à la transversale MN, et la propriété du n° 215 appliquée successivement aux triangles BC′A′ et CAI nous donnera les proportions

$$C'A : C'B :: A'I : A'B,$$
$$CB' : B'A :: CA' : A'I.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre et égalant ensuite le produit des extrêmes à celui des moyens, il viendra

$$A'B . CB' . C'A = A'C . B'A . C'B,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème II.

*288. Réciproquement, *trois points* A′, B′, C′, *situés sur les côtés d'un triangle* ABC *ou sur leurs prolongements, sont en ligne droite, lorsqu'ils déterminent sur ces côtés six segments tels que le produit* A′B.CB′.AC′ *de trois segments non consécutifs est égal au produit* A′C.B′A.C′B *des trois autres, pourvu que les trois points ou un seul d'entre eux se trouvent sur les prolongements des côtés du triangle.*

Employer la règle du n° 48.

THÉORÈME III.

*289. *Trois droites* OA, OB, OC *menées d'un même point aux sommets d'un triangle* ABC *déterminent sur ses côtés ou sur leurs prolongements six segments tels que le produit* AC′.BA′.CB′ *de trois segments non consécutifs est égal au produit* C′B.A′C.B′A *des trois autres.* Fig. 143.

Considérons en effet le triangle ABA′ et la transversale CC′, et nous aurons, en vertu du n° 287,

$$CB.C'A.OA' = CA'.BC'.AO.$$

Les intersections des côtés du triangle ACA′ par la transversale BB′ nous donneront pareillement

$$B'C.BA'.OA = AB'.BC.A'O.$$

En multipliant ces deux égalités membre à membre, et en supprimant les facteurs communs, il viendra

$$AC'.BA'.CB' = C'B.A'C.B'A;$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

THÉORÈME IV.

*290. Réciproquement, *trois droites issues des trois sommets d'un triangle* ABC *concourent en un même point, lorsqu'elles déterminent, sur ses côtés ou sur leurs prolongements, six segments tels que le produit* AC′.BA′.CB′ *de trois segments non consécutifs est égal au produit* C′B.A′C.B′A *des trois autres, pourvu que les trois droites ou une seule d'entre elles coupent les côtés.*

Employer ici la règle du n° 48.

*291. COROLLAIRE I. *Les perpendiculaires abaissées des trois sommets d'un triangle sur les côtés opposés se croisent en un même point.* En effet, les triangles ABA′ et CBC′, ACA′ et BCB′, CAC′ et Fig. 144.
BAB′ sont équiangles et ont par conséquent leurs côtés homologues proportionnels : on aura donc les proportions

$$BA' : BC' :: AB : BC,$$
$$CB' : CA' :: BC : AC,$$
$$AC' : AB' :: AC : AB.$$

On voit que si l'on multiplie ces trois proportions par ordre, le second rapport de la proportion résultante sera égal à l'unité; donc il en sera de même du premier, et par conséquent

$$BA'.CB'.AC' = BC'.CA'.AB',$$

donc les trois perpendiculaires AA′, BB′ et CC′ vont concourir (**290**).

Fig. 145. ***292**. Corollaire ii. *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés concourent en un même point. Ce point que l'on appelle le* centre de gravité *du triangle est situé au tiers de chacune de ces droites à partir des côtés.* Il est d'abord évident que

$$BA'.CB'.AC' = A'C.B'A.C'B;$$

ainsi les trois *médianes* vont se croiser en un même point.

Tirons maintenant A′B′, cette droite sera parallèle à AB (**219**), de sorte que les triangles CAB et CA′B′ seront équiangles; leurs côtés homologues seront ainsi proportionnels; or CA′ est la moitié de CB, donc A′B′ est la moitié de AB. Mais les triangles GAB et GA′B′, qui sont aussi équiangles, ont leurs côtés homologues proportionnels, et comme A′B′ est la moitié de AB, GA′ sera la moitié de GA, donc GA′ est le tiers de AA′.

***293**. Scholie. *Le centre de gravité* G *d'un triangle, le centre* O *du cercle circonscrit et le point de concours* P *des perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les côtés opposés sont trois points situés en ligne droite, et la distance du premier point au second est la moitié de sa distance au troisième.* En effet, les distances GA′ et GC′ étant les moitiés respectives de GA et de GC, si l'on prolonge GP d'une quantité GO égale à la moitié de GP, les droites A′O et C′O seront parallèles à AP et à CP, (**70**, 1°); car les triangles

AGP et OGA′, GPC et GOC′ sont semblables (**253**); et ainsi les angles A et A′, C et C′ sont égaux. Donc A′O et C′O sont les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés BC et AB et O est par conséquent le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

***294**. *On appelle* POINTS HARMONIQUES *quatre points situés en ligne droite, de telle sorte que les distances du second au premier et au troisième sont proportionnelles aux distances du quatrième à ces mêmes points, ou que le produit de la distance des deux points extrêmes par celle des deux points moyens est égal au produit des distances de ces deux-ci aux deux autres.* Si donc on a

BA : BC :: DA : DC ou DA . BC = BA . CD, Fig. 146.

on dira que les quatre points A, B, C, D forment un *système harmonique.* Les points de rangs pairs ou de rangs impairs sont dites *points conjugués.*

Des proportions (1) et (2) du n° **221** on tire Fig. 100.

IB : IC :: I′B : I′C;

ainsi les quatre points I′, B, I, C forment un système harmonique; B et C, I et I′ sont des points conjugués.

***295**. *On appelle* FAISCEAU HARMONIQUE *le système de quatre droites qui, issues d'un même point, vont passer par quatre points harmoniques.* Celles qui passent par des points conjugués sont dites *harmoniques conjuguées.* Ainsi, dans la figure 100, les droites AI′, AB, AI et AC forment un faisceau harmonique; AB et AC, AI et AI′ sont des harmoniques conjuguées. On voit donc que *les deux côtés d'un angle et les bissectrices de cet angle et de son supplément forment un faisceau harmonique.*

Théorème V.

***296**. *Quatre droites issues d'un même point* O *forment un faisceau harmonique, lorsqu'une parallèle* EF *à l'une d'elle* OA *est coupée par les trois autres en parties égales.* Fig. 147.

Tirons, en effet, une transversale quelconque AD, et je dis, que les quatre points A, B, C, D où elle rencontre les droites proposées, sont harmoniques. Pour le démontrer, je mène par le point C une parallèle IK à EF, laquelle sera coupée en deux parties égales en ce point (**225**). Nous formerons ainsi des triangles équiangles DOA et DKC, BCI et BOA qui nous donneront les proportions

$$DA:DC :: OA:CK,$$
$$BA:BC :: OA:CI=CK;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$BA:BC :: DA:DC.$$

***297**. Scholie. AD étant une droite quelconque, la démonstration prouve que *toute transversale est coupée harmoniquement par un faisceau harmonique.*

Théorème VI.

***298**. Réciproquement, *si quatre droites issues d'un même point forment un faisceau harmonique, toute parallèle à l'une d'elles sera coupée en parties égales par les trois autres.*

Cette réciproque se démontrera par la règle du n° **48**, si l'on ne veut pas imiter la démonstration de la proposition directe.

Théorème VII.

Fig. 148. ***299**. *Si d'un point* O, *pris sur le plan d'un angle* XAY, *on mène une série de transversales* OBC, OB′C′, OB″C″....., *qui coupent les côtés de cet angle, les droites qui, comme* BC′ *et* CB′, *joindront les points de section opposés d'un même couple de transversales, se couperont en des points* M, M′, M″.... *dont le lieu sera l'harmonique conjuguée de* OA *par rapport aux deux côtés de l'angle* XAY.

Joignons, en effet, le point M au point A, et en appliquant au triangle ABC le théorème du n° **289**, nous aurons

$$B'B.IC.C'A = B'A.IB.C'C.$$

Si on considère OB′C′ comme une transversale du même triangle ABC, on aura aussi (287)

$$OB.B'A.C'C = OC.B'B.C'A;$$

multipliant ces deux équations membre à membre, et supprimant les facteurs communs, il viendra

$$OB.IC = OC.IB,$$

ce qui montre que les quatre points O, C, I, B forment un système harmonique; donc AM est l'harmonique conjuguée de AO par rapport aux deux droites AX et AY. Par la même raison, AM′ sera aussi l'harmonique conjuguée de AO par rapport à ces mêmes droites, et comme une droite ne peut avoir qu'une seule harmonique conjuguée à l'égard de deux autres [1], notre théorème se trouve ainsi démontré.

Problème I.

* **300.** *Trouver l'harmonique conjuguée de la droite* OB *par rapport aux deux droites* OA *et* OC.

1re *solution.* Par un point quelconque E de OB je mène une parallèle EGF à OA, je prends GF = GE et en joignant OF, j'aurai résolu le problème (296). Fig. 147.

2e *solution.* Par un point quelconque M de OB, je mène les deux transversales AF et GC, je joins AC et GF, et en tirant une ligne droite par leur point de concours D et par le point O, on aura l'harmonique conjuguée de OB. Fig. 149.

Cette construction a, sur la précédente, l'avantage de pouvoir être effectuée avec la règle seulement.

---

(1) Cela est assez évident de soi-même; au reste, on pourrait dire : si OA avait une seconde harmonique conjuguée AI′, on devrait avoir (297)

$$OB.I'C = OC.I'B;$$

et en multipliant cette équation en croix par la précédente, il viendrait

$$I'C.\,IB = IC.\,I'B,$$

équation évidemment absurde.

Elle pourrait aussi servir à trouver l'harmonique conjuguée de B, par rapport aux deux points A et C. Il suffirait, pour cela, de joindre les points A, B, C à un point arbitraire O, de tirer ensuite par A une sécante quelconque AF, ce qui déterminerait le point M; on joindrait ensuite CM, puis en prolongeant GF on aurait le point D.

Théorème VIII.

Fig. 150. * **301**. *Dans tout quadrilatère* COMPLET [1] BAEDFCB, *chacune des trois diagonales* AC, BD *et* EF *est divisée harmoniquement par les deux autres.*

Il résulte, en effet, de la 2e solution du problème précédent que BI est l'harmonique conjuguée de BD par rapport aux droites BA et BC; donc les diagonales EF et AC sont coupées en parties harmoniques, la première aux points E, H, F, I, et la seconde aux points A, G, C, I. On verra de même que ID est l'harmonique conjuguée de IB par rapport aux droites IG et IH, et qu'ainsi les quatre points B, G, D, H forment un système harmonique.

§. II. *Théorie du pôle et de la polaire.*

Lemme.

Fig. 151 et 152. * **302**. *Le lieu des points harmoniques conjugués d'un point donné* O, *par rapport aux extrémités des cordes que laissent dans un cercle toutes les sécantes issues de ce point, est une ligne droite perpendiculaire au diamètre tiré par ce même point.*

Tirons le diamètre OAB, et en cherchant l'harmonique conjuguée P de O par rapport aux points A et B,

---

[1] Si l'on prolonge les côtés opposés d'un quadrilatère *simple* ABCD jusqu'à leur rencontre en E et en F, on dit que la droite EF est la troisième diagonale du quadrilatère, et que ce quadrilatère est complet.

nous aurons un point du lieu. Il s'agit donc de faire voir que si par ce point on mène une perpendiculaire à AB, elle coupera toute corde CD issue de ce point en parties harmoniques. Pour cela, j'observe que la circonférence ABCD est le lieu de tous les points dont les distances aux points O et P sont dans le rapport AO : AP ou BO : BP (**222**), puisqu'on a, par construction,

$$AO : AP :: BO : BP;$$

si donc on joint PC et PD, on aura

$$CO : CP :: DO : DP.$$

Or, cette proportion prouve que, dans la figure 151, OP est la bissectrice de l'angle CPD′, et que par conséquent RS, qui est perpendiculaire à OP, divise l'angle CPD en deux parties égales. On voit de même que, dans la figure 152, OP est la bissectrice de l'angle CPD, et que par conséquent RS, qui est perpendiculaire à OP, divise l'angle CPD′ en deux parties égales; donc les quatre droites PO, PC, PR et PD forment un faisceau harmonique (**295**), donc la droite RS passe par le point conjugué de O, par rapport aux points C et D (**297**).

Problème I.

* **303**. *Par un point fixe* O, *on mène tant de couples de sécantes que l'on voudra à une circonférence, trouver le lieu des points de concours des droites qui joindront les points où ces sécantes rencontrent la courbe.* Fig. 153.

Soient OAB et OA′B′ un couple de sécantes, il s'agit de trouver le lieu des points M et M′, déterminés en joignant AB′ et BA′, AA′ et BB′. Désignons, pour cela, par N et par N′ les points harmoniques conjugués de O par rapport à A et à B, et à A′ et à B′. Joignons MO et MN et nous formerons un faisceau harmonique MOANB, qui devra couper OA′B′ en parties harmoniques (**297**); par conséquent MN ira passer par N′;

donc le point M est situé sur la direction indéfinie de la droite qui est le lieu des points harmoniques conjugués de O par rapport à la circonférence proposée ; et comme on en dirait autant du point M′, il faut en conclure que cette droite est précisément le lieu que l'on cherche.

* **304.** Le lieu des points M se nomme la *polaire* du point O, et ce point est appelé réciproquement le *pôle* de cette droite. Nous verrons bientôt la raison de ces dénominations (**308** et **312**).

* **305.** Nous pourrons, d'après cela, énoncer le lemme (**302**) en disant que *toutes les cordes dont les*
Fig. 150 et 151. *directions vont passer par un même point* O, *situé sur le plan d'une circonférence, sont coupées en parties harmoniques par ce point et par sa polaire* RS, *laquelle est perpendiculaire au diamètre* AB *tiré par ce point.*

Ainsi on a la proportion

$$AO : AP :: BO : BP.$$

On tire de cette proportion

$$BO + AO : BO - AO :: BP + AP : BP - AP,$$

mais, en désignant par G le centre de la circonférence, on voit facilement (fig. 151) que $BO = 2AG + AO$ et que $BP = 2AG - AP$; de même, dans la fig. 152, on aura $BO = 2AG - AO$ et $BP = 2AG + AP$; on tirera ainsi de la proportion précédente

Fig. 151. $$AG + AO : AG :: AG : AG - AP,$$

ou encore

$$OG : AG :: AG : PG ;$$

Fig. 152. et

$$AG : AG - AO :: AG + AP : AG,$$

ou encore

$$AG : OG :: PG : AG.$$

On voit donc que *le produit des distances du centre au pôle et à sa polaire est égal au carré du rayon.*

Fig. 153. * **306.** Si l'on suppose que la sécante OA′B′ tourne

autour du pôle et devienne tangente, les points M et M′ se réuniront au point de contact R, de sorte que la polaire passera par ce point. Donc *la polaire d'un point* EXTÉRIEUR *à une circonférence est la corde qui joint les points de contact des deux tangentes issues de ce point, et le pôle d'une sécante est le point de concours des tangentes menées aux points où elle rencontre la circonférence.*

* **307**. Il suit de là que *pour mener une tangente à un cercle par un point extérieur, il n'y aura qu'à chercher la polaire de ce point et le joindre aux points où elle coupera la circonférence.* Cette construction peut, comme on voit (**303**), s'exécuter avec la règle seulement.

Théorème X.

* **308**. *Si un point mobile glisse le long d'une ligne droite* RS, *sa polaire tournera autour du pôle* Fig. 151 et 152.
O *de cette droite.*

Soit O′ un point quelconque de RS, je joins GO′ et j'abaisse de O la perpendiculaire OP′ sur cette droite. La similitude des deux triangles GO′P et GOP′ donne la proportion

$$GP : GP' :: GO' : GO,$$

d'où l'on tire

$$GP' . GO' = GP . GO = \overline{AG}^2 \text{ (305)}.$$

On voit donc que OP′ est la polaire du point O′ et qu'ainsi *les polaires de tous les points d'une droite vont se croiser au pôle même de cette droite*, ce qui *démontre notre théorème.*

* **309**. Corollaire i. *Pour obtenir le pôle d'une droite, il suffira de construire les polaires de deux de ses points, et le point d'intersection de ces deux polaires sera le point demandé.*

* **310**. Corollaire ii. *Pour mener une tangente* Fig. 154.
à un cercle par un point pris sur sa circonférence,

tirez une sécante quelconque par ce point, cherchez son pôle et joignez-le au point donné.

* **311**. Corollaire iii. *Si plusieurs angles circonscrits à un cercle ont leurs sommets en ligne droite, leurs cordes de contact iront concourir au pôle de cette droite*, car ces cordes étant les polaires de ces sommets (**306**), vont concourir au pôle de la droite qui les contient.

Théorème XI.

* **312**. *Si une droite tourne autour d'un point fixe, son pôle décrira la polaire de ce point.*

Fig. 150 et 151. Soit OP′ une droite quelconque tirée par le pôle O de la droite RS, j'abaisse du centre une perpendiculaire sur OP′, je la prolonge jusqu'à la rencontre de RS en O′ et je dis que ce point est le pôle de cette droite. En effet, la similitude des deux triangles OGP′ et O′GP donne la proportion

$$GP : GP' :: GO' : GO,$$

d'où je tire

$$GP' . GO' = GP . GO = \overline{AG}^2.$$

Donc O′ est le pôle de OP′, et ainsi *le pôle de toute droite menée par un point donné est situé sur la polaire de ce point,* ce qui démontre notre théorème.

* **313**. Corollaire i. *La droite qui joint les pôles de deux droites est la polaire de leur point d'intersection,* car le pôle de cette droite doit se trouver à la fois sur les deux droites dont il s'agit.

Fig. 154. * **314**. Corollaire ii. *Si les cordes de contact de tant d'angles que l'on voudra, circonscrits à une circonférence, concourent en un même point, les sommets de ces angles se trouveront sur la polaire de ce point*, car ces sommets sont les pôles de ces cordes.

* **315**. Il suit du nº **313** que *si deux polygones d'un même nombre de côtés tracés sur le plan d'une*
Fig. 155. *circonférence, sont tels que les sommets* A, B, C,... *de*

l'un soient les pôles des côtés a, b, c... de l'autre, réciproquement *les sommets ab, bc... du second* [1] *seront les pôles des côtés* AB, BC..., *du premier; et de plus le point de concours de deux côtés ou de deux diagonales quelconques de chacun sera le pôle de la droite qui joindra les sommets-pôles de ces deux côtés ou de ces deux diagonales dans l'autre.* Ainsi, par exemple, le point *ad* de concours des deux côtés *a* et *d* est le pôle de la droite AD qui joint les sommets A et D, pôles respectifs de *a* et de *d*.

À raison de ces deux propriétés corrélatives, les deux polygones sont appelés POLAIRES-RÉCIPROQUES l'un de l'autre.

Théorème XII.

* **316**. *Dans tout hexagone inscrit à une circonférence les points de concours des côtés opposés sont tous trois situés sur une même ligne droite.*

Les côtés alternatifs BC, DE et AF prolongés suffisamment forment le triangle PQR que l'on peut regarder comme coupé successivement par les directions des trois autres côtés de l'hexagone AB, CD et EF; on obtiendra ainsi les égalités (**287**) Fig. 156.

$$LP.BR.AQ = LQ.BP.AR,$$
$$NQ.CR.DP = NR.CP.DQ,$$
$$MR.EP.FQ = MP.EQ.FR.$$

Si on multiplie ces trois égalités membre à membre en observant que (**228**)

$$BR.CR. = FR.AR, \quad DP.EP = CP.BP,$$
$$AQ.FQ = DQ.EQ,$$

il viendra

$$LP.NQ.MR = LQ.NR.MP,$$

---

[1] Deux droites étant désignées par *m* et par *n*, leur point d'intersection pourra l'être par *mn*.

ce qui, d'après le théorème du n 288, prouve que les trois points L, M, N sont en ligne droite.

* **317**. SCHOLIE. Ce théorème est vrai, quelle que soit la forme de l'hexagone inscrit et lors même que ses côtés s'entre-croiseraient de toutes les manières possibles.

THÉORÈME XIII.

* **318.** *Dans tout hexagone circonscrit à une circonférence, les diagonales qui joignent les sommets respectivement opposés se croisent toutes trois en un même point.*

Ce théorème est une conséquence directe du précédent et du principe du n° **315**, car les deux polygones ABCDEF et *abcdef* étant polaires-réciproques l'un de l'autre, les points de concours L, M et N des côtés AB et DE, BC et EF, CD et AF du premier sont les pôles des diagonales *be*, *cf* et *ad* qui, dans le second, joignent les sommets-pôles de ces couples de côtés. Puis donc que les trois points L, M et N sont en ligne droite, les trois diagonales *be*, *cf* et *ad* se croiseront au même point O, qui sera le pôle de cette droite (**308**).

THÉORÈME XIV.

* **319.** *Si l'on inscrit à une circonférence un qua-*
Fig. 157. *drilatère quelconque* ABCD *et qu'on lui en circonscrive un autre* abcd, *dont les côtés touchent cette courbe aux sommets du premier, 1° les quatre points de concours* L, M, N, P *des côtés opposés de ces deux quadrilatères seront tous quatre situés sur une même droite; 2° leurs quatre diagonales* AC, BD, *ac, bd se croiseront au pôle de la droite* LMNP; 3° *les diagonales du quadrilatère circonscrit iront passer par les points* M *et* L *où se coupent les côtés opposés du quadrilatère inscrit.*

Soit O le point d'intersection des deux diagonales

AC et BD : la polaire de ce point sera la droite LM (**303**); elle devra donc contenir les pôles N et P de ces diagonales, donc les quatre points L, M, N, P sont situés sur une même ligne droite.

Les deux quadrilatères étant polaires-réciproques, les points L et M sont les pôles des diagonales *ac* et *bd*, puis donc que les quatre points L, M, N, P sont rangés en ligne droite, leurs polaires *ac*, *bd*, AC, BD iront se croiser au pôle de cette droite.

Enfin, OM est la polaire de L (**303**) et *ac* l'est aussi; donc la droite *ac* va passer par le point M. Par une raison semblable, *bd* va passer par le point L.

LIVRE IV.

DES POLYGONES RÉGULIERS ET DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE.

CHAPITRE PREMIER.

DES POLYGONES RÉGULIERS.

320. Si l'on suppose qu'après avoir divisé une circonférence en parties égales, on joigne chaque point de division avec le suivant, on formera ainsi un polygone dont tous les côtés seront égaux ainsi que les angles (**91** et **116**). Un pareil polygone est dit *régulier*. Ainsi *on appelle* POLYGONE RÉGULIER *celui qui est à la fois équiangle et équilatéral*. Le triangle équilatéral et le carré sont donc des polygones réguliers. On voit qu'il y a des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés, et que ces polygones sont nécessairement convexes.

THÉORÈME I.

321. *Tout polygone régulier est à la fois inscriptible et circonscriptible à la circonférence.*

Fig. 158. Soit ABCDEF un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés. On pourra toujours faire passer une circonférence par les trois sommets consécutifs A, B, C (79), et je dis qu'elle passera nécessairement par le sommet suivant D. Joignons, en effet, le centre O avec les sommets A, B, C, D. Les deux triangles ABO et BCO, seront équilatéraux entre eux, et par conséquent égaux : donc l'angle ABO = OBC (**168**); ainsi chacun d'eux est la moitié de ABC. Mais le triangle BCO est isocèle : donc l'angle BCO est égal à OBC (**157**); il est donc la moitié de ABC, et partant de son égal

BCD; donc l'angle OCD est l'autre moitié de celui-ci, et les triangles BCO, OCD, ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux; donc OD = OB; donc la circonférence qui passe par les trois sommets consécutifs A, B, C, passera aussi par le sommet suivant D. Mais on prouvera, par un raisonnement semblable, que, puisqu'elle passe par les trois sommets B, C, D, elle passera par le sommet suivant E, et ainsi de suite : donc, enfin, tous les sommets du polygone se trouvent sur la circonférence que nous avons décrite par les trois sommets A, B, C; donc le polygone est inscrit dans cette circonférence.

En second lieu, tous les côtés AB, BC, CD.... sont des cordes égales de la circonférence que nous venons de décrire : donc elles sont également éloignées du centre O (94); donc les perpendiculaires OK, OG..... abaissées de ce point sur ces côtés seront égales; et par conséquent la circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OG, touchera tous les côtés du polygone (87), chacun dans son milieu (81). Cette circonférence sera inscrite dans le polygone, ou le polygone sera circonscrit à la circonférence [1].

322. Scholie I. Cette démonstration s'appliquerait très-bien à une ligne *brisée régulière*, c'est-à-dire à une brisée formée de droites égales et également inclinées entre elles : ainsi *toute ligne brisée régulière est à la fois inscriptible et circonscriptible à la circonférence.*

Remarquons qu'une brisée régulière serait une portion du périmètre d'un polygone régulier, si l'arc de la circonférence circonscrite, sous-tendu par un de ses côtés, était une partie aliquote de cette circonférence.

---

[1] Il est évident que l'on ne peut circonscrire qu'une seule circonférence à un polygone régulier. On ne peut de même lui inscrire qu'une seule circonférence, car le centre de toute circonférence inscrite dans le polygone régulier ABCDEF, doit se trouver sur les bissectrices des angles A et B (138) et ces droites ne se rencontrent qu'en un seul point.

323. Scholie ii. On appelle ordinairement centre *d'un polygone régulier* le centre commun des circonférences qui lui sont inscrite et circonscrite, mais cette dénomination est vicieuse, car le point dont il s'agit n'est vraiment un centre que si le polygone a un nombre pair de côtés (**180**).

324. Scholie iii. L'angle au centre d'un polygone régulier est l'angle AOB formé par les deux rayons menés du centre commun O des circonférences inscrite et circonscrite aux extrémités d'un même côté AB. Tous les angles au centre d'un polygone régulier sont égaux (**105**); et, comme leur somme est égale à quatre droits (**44**), on aura la valeur de chacun, en divisant quatre droits par le nombre de ces angles ou par le nombre des côtés du polygone.

325. Désormais nous appellerons *rayon* et *apothème* d'un polygone régulier, les rayons respectifs des circonférences circonscrite et inscrite à ce polygone.

Théorème II.

326. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et leurs périmètres sont proportionnels aux rayons des cercles qui leur sont inscrits et circonscrits.*

1° Soit n, le nombre des côtés d'un polygone régulier, la somme des angles de ce polygone vaudra $2(n-2)$, en prenant l'angle droit pour unité, et par conséquent chaque angle sera égal à $\frac{2(n-2)}{n}$ [1]; puis donc que nos deux polygones ont le même nombre de

[1] Cette formule revient à $2-\frac{4}{n}$; or, à mesure que n augmente, la fraction $\frac{4}{n}$ tend vers zéro, et, par conséquent, la différence $2-\frac{4}{n}$ tend en même temps vers 2; *deux droits sont donc une limite dont l'angle d'un polygone régulier s'approche d'autant plus que le nombre des côtés de ce polygone est plus grand, et qu'il ne pourrait atteindre que si ce nombre était infini.*

côtés, on voit qu'ils sont équiangles. D'ailleurs, comme chacun de ces polygones est équilatéral, leurs côtés homologues sont proportionnels; donc ils sont semblables (258).

2° Soient AB et A′B′ les côtés de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés; O et O′ les centres des cercles inscrit et circonscrit à chacun d'eux, OI et O′I′, et OA et O′A′, les rayons de ces cercles. Les deux triangles isocèles OAB et O′A′B′ sont semblables; car les angles au centre AOB et A′O′B′ sont égaux. On aura donc la proportion. Fig. 159.

$$AB : A'B' :: OI : O'I' :: OA : O'A';$$

ce qui prouve que *les côtés de deux polygones réguliers semblables sont proportionnels à leurs rayons et à leurs apothêmes*. Mais ces côtés sont aussi proportionnels aux périmètres des deux polygones (265) : donc, enfin, les périmètres de deux polygones réguliers semblables sont proportionnels à leurs rayons et à leurs apothêmes.

Problème I.

327. *Un polygone régulier* ABCDEF *étant inscrit dans un cercle, on propose, 1° de circonscrire à ce cercle un polygone régulier du même nombre de côtés; 2° de calculer le côté du nouveau polygone en fonction de celui du premier, et du rayon de la circonférence.* Fig. 158.

1° *Première solution.* Du centre O abaissez OI perpendiculairement sur AB, et menez au point I une tangente que vous terminerez aux prolongements des rayons OA et OB. Je dis d'abord que OA′ = OB′; et, en effet, les triangles OIA′ et OIB′ ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : car, le point I étant le milieu de l'arc AB, les angles A′OI et B′OI interceptent des arcs égaux entre leurs côtés; donc, si du point O comme centre, et avec le rayon OA′, on décrit une circonférence, elle passera par le point B′. Tirez les rayons OCC′, ODD′...., puis

joignez $B'C'$, $C'D'$..... Je dis que le polygone $A'B'C'D'E'F'$ est régulier, et circonscrit à la circonférence OA. En effet, ses angles au centre étant précisément ceux du polygone ABCDEF, on voit que les arcs $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$..... compris entre leurs côtés, sont égaux (**106**) : donc tous les côtés $A'B'$, $B'C'$... sont égaux (**91**), et les angles A', B', C'..... sont aussi égaux (**116**); donc le polygone est régulier. En second lieu, il est circonscrit; car tous ses côtés sont des cordes égales de la circonférence OA', et par conséquent également éloignées de son centre. Mais l'une d'elles $A'B'$ est tangente à la circonférence OA : donc toutes les autres le sont aussi.

Seconde solution. A chaque sommet du polygone menons une tangente, et le problème sera résolu. En
Fig. 160. effet tous les angles $A'AB$, $A'BA$, $B'BC$..... sont égaux (**118**) : donc tous les triangles $A'AB$, $B'BC$..... sont isocèles. Mais les côtés AB, BC..... sont égaux : donc tous ces triangles sont égaux (**161**); donc

$$A'A = A'B = B'B = B'C = C'C = \text{etc.};$$

par conséquent

$$A'B' = B'C' = C'D' = \text{etc.}$$

D'ailleurs les angles A', B', C',.... sont égaux (**161**); donc le polygone $A'B'C'D'E'F'$ est régulier. Mais il est circonscrit; donc il résout la première partie du problème.

Fig. 158. 2° Représentons par R et par a les longueurs respectives du rayon et du côté AB du polygone inscrit; et par x celle du côté $A'B'$ du polygone circonscrit. La similitude des triangles ABO, $A'B'O$, donne la proportion (**263**)

$$A'B' : AB :: OI : OK,$$

ou, en remplaçant les lignes OI, AB et $A'B'$ par leurs longueurs, $x : a :: R : OK.$

Mais le triangle AOK étant rectangle, on a (**255**)

$$OK = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AK}^2} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}},$$

car $AK = \frac{AB}{2}$; ou, en remplaçant OA par R, AB par a, et réduisant l'entier au même dénominateur que la fraction qui l'accompagne,

$$OK = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2} \text{ (1)};$$

donc, en substituant dans la proportion précédente, il viendra :

$$x : a :: R : \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2};$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{2R \cdot a}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \dots (1).$$

Supposons $a = 3^{d.m}$, et $R = 4^{d.m}$, et cherchons la valeur de x *à moins d'un cinquième* de décimètre. On aura : $2R = 8^{d.m}$, et partant $x = \frac{8 \cdot 3}{\sqrt{64 - 9}} = \frac{24}{\sqrt{55}}$; or, on peut regarder cette fraction comme la racine carrée de son carré, c'est-à-dire de $\frac{24^2}{55}$; donc il ne s'agira plus, pour résoudre la question, que d'appliquer à la fraction $\frac{24^2}{55} = \frac{576}{55}$ la règle donnée au n° **185** de l'Arith., et l'on trouvera ainsi que $x = \frac{16}{5}^{d.m} = 3^{d.m},2$.

Remarquons que la valeur (1) de x est calculable par logarithmes : car la quantité $4R^2 - a^2$, étant la différence des carrés des quantités $2R$ et a, est, comme on le démontre dans l'algèbre, égale à la somme $(2R + a)$ de ces quantités, multipliée par leur différence $(2R - a)$. On a donc :

$$x = \frac{2R \cdot a}{\sqrt{(2R + a)(2R - a)}};$$

et par conséquent (Arithmétique, n^{os} **252**, **253** et **255**)

$$L.x = L.2R + L.a - \frac{L(2R + a) + L(2R - a)}{2}.$$

(1) *Pour calculer l'apothéme d'un polygone régulier, retranchez le carré de son côté du carré du diamètre et prenez la moitié de la racine carrée du reste.*

328. Corollaire. Réciproquement, si l'on donnait le polygone circonscrit, et que l'on proposât d'inscrire au même cercle un polygone régulier du même nombre de côtés, on pourrait y parvenir en menant, du centre, des droites à tous les sommets du polygone circonscrit, et en joignant ensuite deux à deux les points où ces droites couperaient la circonférence. On pourrait encore joindre les points de contact deux à deux, et le polygone ainsi formé serait régulier : car, chacun des côtés A′B′, B′C′..... étant divisé en deux parties égales au point de contact (**321**), tous les triangles A′AB, B′BC..... sont égaux (**159**), et, par conséquent, les côtés AB, BC..... sont égaux ; donc le polygone est régulier (**320**).

Problème II.

329. *Un polygone régulier étant inscrit dans un cercle, on propose, 1° d'inscrire dans ce cercle un polygone régulier qui ait deux fois plus de côtés que lui ; 2° de calculer le côté du nouveau polygone en fonction du côté du premier, et du rayon de la circonférence.*

Fig. 158. 1° Abaissez du centre O des perpendiculaires sur tous les côtés du polygone donné, et joignez chaque point de division avec les extrémités du côté correspondant, et le problème sera résolu.

2° Soient AB le côté du polygone inscrit, et OI perpendiculaire sur AB : AI sera donc le côté du polygone inscrit de deux fois plus de côtés. Désignons les longueurs de AB et de AI respectivement par a et par y, et toujours par R celle du rayon.

En appliquant le théorème du n° **238** au triangle AOI, il viendra

$$\overline{AI}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OI}^2 - 2OI.OK,$$

ou, en remplaçant AI et OA, respectivement, par y et par R, et OK par sa valeur $\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$ que nous avons trouvée tout à l'heure (**327**),

$$y^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2-a^2};$$

on aura donc enfin

$$y=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})},$$

en mettant R en facteur commun, et extrayant la racine carrée du deuxième membre.

Supposons, par exemple, que $R=3^{d.m}$, et $a=2^{d.m}$, et cherchons la valeur de y *à moins d'*UN DIXIÈME près. On aura d'abord, en remplaçant, $y=\sqrt{3(6-\sqrt{32})}$. Maintenant, pour avoir l'approximation demandée, on devra multiplier la quantité $3(6-\sqrt{32})$, par 100 (Arith., n° **175**), ce qui donnera $300(6-\sqrt{32})=1800-300.\sqrt{32}=1800-\sqrt{2880000}$: car, puisqu'on peut extraire la racine carrée d'un produit en extrayant la racine de chaque facteur et en multipliant ces racines entre elles, on voit que $300.\sqrt{32}=\sqrt{300^2.32}=\sqrt{2880000}$. La racine carrée de 2880000 est, *en plus*, et à moins d'une unité près 1698. Je retranche ce nombre de 1800, et je trouve que la racine du plus grand carré contenu dans le reste 102 est 10. Telle est la racine carrée de la quantité $1800-\sqrt{2880000}$ à moins d'une unité : car le carré de 11, surpassant 102 au moins d'une unité, est par conséquent plus grand que $1800-\sqrt{2880000}$, tandis que celui de 10 est au contraire plus petit qu'elle ; donc, enfin la valeur demandée de y sera $\frac{10^{d.m}}{10}=1^{d.m}$ (1).

330. SCHOLIE I. Dans le calcul de la valeur de y rien n'exprime que AB soit le côté d'un polygone régulier : ainsi la formule que nous venons de trouver résout ce

---

(1) Les élèves, qui connaisssent la formule par laquelle on tâche, en algèbre, d'obtenir *la racine carrée d'une quantité qui est en partie commensurable et en partie incommensurable du deuxième degré*, au moyen de deux racines carrées indépendantes l'une de l'autre, trouveront, en appliquant cette formule au calcul de la valeur de y, que

$$y=\sqrt{\frac{R(2R+a)}{2}}-\sqrt{\frac{R(2R-a)}{2}},$$

équation dont chaque terme est calculable par logarithmes.

problème plus général : *Étant donnés, le rayon d'une circonférence et la corde d'un arc quelconque, trouver la corde de la moitié de cet arc.* Nous observerons seulement qu'il ne s'agit alors que de la corde de la moitié du plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde donnée a. S'il s'agissait de l'autre, la valeur de y serait alors

$$y=\sqrt{R(2R+\sqrt{4R^2-a^2})}:$$

car, dans le triangle obtusangle AOI′, on a

$$\overline{AI'}^2=\overline{AO}^2+\overline{OI'}^2+2OI'.OK.$$

331. Scholie ii. Si l'on veut circonscrire au cercle un polygone régulier qui ait deux fois plus de côtés
Fig. 161. que le polygone inscrit ABC, on mènera d'abord des tangentes à chaque sommet du polygone inscrit; puis on joindra les sommets A′, B′, C′, du polygone circonscrit ainsi formé, avec le centre par des droites; et aux points P, Q, R, où elles couperont la circonférence, on mènera des tangentes. Le nouveau polygone DEFGIK sera régulier (**327**, 2ᵉ solution), car les points de contact de tous ses côtés divisent la circonférence en parties égales.

332. Scholie iii. Remarquons enfin que les contours de deux polygones réguliers, inscrit et circonscrit, sont respectivement moindre et plus grand que ceux des polygones inscrit et circonscrit qui ont deux fois plus de côtés : car, dans le premier cas, chaque droite AB est moindre que la brisée APB, et, dans le second, chaque brisée AC′B est plus longue que la brisée ADEB.

Problème III.

333. *Inscrire un carré dans une circonférence.*

Fig. 162. Tirez deux diamètres AC et BD qui se coupent à angles droits, et vous aurez ainsi partagé la circonférence en quatre parties égales : par conséquent le quadrilatère formé en joignant chaque point de division avec le suivant sera un carré (**320**).

334. Scholie. Si l'on veut calculer le côté du carré

inscrit dans une circonférence dont le rayon est donné, on observera que ce côté AB est l'hypoténuse du triangle isocèle rectangle AOB, de sorte qu'on aura (**234**):

$$AB = \sqrt{2R^2}.$$

Mais la racine carrée d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des racines carrées de ces facteurs : donc

$$AB = R.\sqrt{2}.$$

Donc *le côté du carré inscrit est égal au rayon multiplié par la racine carrée de deux.*

335. Corollaire i. Il suit de là que *le rapport du côté du carré inscrit au rayon, ou de la diagonale d'un carré au côté de ce carré* (AB est la diagonale du carré construit sur AO), *est égal à la racine carrée de deux, de sorte que ce rapport est incommensurable* (Arith., n° **166**). C'est, au reste, ce que l'on trouve en cherchant la commune mesure des droites AB et AO (**24**).

En effet, si du point B comme centre, et avec AO pour rayon, on décrit une circonférence, on aura (**229**):

$$AF : AO :: AO : AI.$$

Ainsi $AI < AO$; donc AB contient *une* fois AO, avec le *reste* AI.

Il faut donc chercher combien de fois AI est contenu dans AO, ou, ce qui revient au même, combien de fois AO est contenu dans AF; car la proportion ci-dessus exprime que le rapport $\frac{AO}{AI} = \frac{AF}{AO}$. Or, $AF = 2AO + AI$; donc le rapport $\frac{AF}{AO}$, c'est-à-dire $\frac{AO}{AI}$ est égal à $2 + \frac{AI}{AO}$; de sorte que nous voilà de nouveau ramenés à chercher combien de fois AI est contenu dans AO, d'où l'on voit que l'opération ne pourra jamais se terminer, et qu'ainsi il n'y a pas de commune mesure entre le côté du carré inscrit et le rayon [1].

---

[1] Si l'on développe ce rapport de AB à AO en fraction con-

336. Corollaire ii. On voit que si le rayon du cercle était égal à l'unité linéaire, le côté du carré inscrit serait égal à la racine carrée de 2. Ainsi la géométrie fournit un procédé rigoureux pour obtenir *exactement* la grandeur de l'irrationnelle $\sqrt{2}$. Il en est de même de la racine carrée de tout nombre n qui n'est pas un carré parfait; car cette racine est une moyenne proportionnelle entre l'unité linéaire et la droite qui contiendrait n fois cette unité (Arithmétique, n° **224**). Observons toutefois qu'il faudrait, pour cela, pouvoir tracer de *véritables* lignes sur une surface *véritablement* plane, de sorte que cette exactitude n'est qu'intellectuelle. Aussi, si, ayant exécuté, par exemple, l'inscription d'un carré dans un cercle décrit avec l'unité linéaire pour rayon, on porte son côté sur une échelle, on obtiendra une valeur de $\sqrt{2}$ bien moins approchée que celle fournie par le calcul.

Problème IV.

337. *Inscrire un hexagone régulier dans une circonférence.*

Fig. 163. Supposons le problème résolu, et soit AB le côté de l'hexagone régulier. Son angle au centre AOB sera le sixième de quatre droits (**324**), c'est-à-dire les $\frac{4}{6}$ ou les $\frac{2}{3}$ d'un seul; donc il restera pour la somme des deux autres angles A et B du triangle OAB (**148**), $2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ d'angle droit. Mais ces angles sont égaux (**157**), puisque $AO=OB$; donc chacun d'eux vaudra $\frac{2}{3}$ d'un droit; donc le triangle AOB est équiangle, et, par conséquent, équilatéral (**158**). Ainsi, le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon; de sorte que, pour inscrire

---

tinue, on verra facilement qu'il est exprimé par la fraction périodique mixte

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}},$$

qui est précisément le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue.

ce polygone dans la circonférence, il suffira de porter le rayon six fois sur cette courbe, et de joindre chaque point de division avec le suivant.

338. Corollaire. En joignant les sommets de l'hexagone régulier de deux en deux, on formera le triangle équilatéral inscrit. Si l'on veut calculer son côté, on observera que l'arc ABCD étant $\frac{3}{6}$ ou la moitié de la circonférence, le triangle ACD est rectangle en C, et qu'ainsi AD étant égal à 2R, et CD à R, on aura :

$$AC = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2},$$

ou, enfin :

$$AC = R.\sqrt{3}.$$

Ainsi *le côté du triangle équilatéral inscrit est égal au rayon multiplié par la racine carrée de* 3 : d'où l'on voit que la racine carrée de *trois* est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont le rayon est l'unité linéaire.

339. Scholie i. On voit, à l'inspection seule de la figure, que les points C et E étant chacun équidistants de O et de D, CE est perpendiculaire sur le milieu de OD, de sorte que l'*apothême* r *d'un triangle équilatéral est la moitié du rayon* R *du cercle qui lui est circonscrit et que sa hauteur* h *est les* $\frac{3}{2}$ *de ce même rayon*. Si donc on désigne par a le côté de ce triangle, on aura

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}},\ r = \frac{a}{2\sqrt{3}},\ h = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Si on mène au point D une tangente terminée aux prolongements des rayons OC et OE, on obtiendra le côté C′E′ du triangle équilatéral circonscrit au cercle OA. Or, la similitude des triangles OCE et OC′E′ donne la proportion

$$C'E' : CE :: OD : OG\ (263) :$$

Donc *le côté du triangle équilatéral circonscrit à un*

cercle est double de celui du triangle équilatéral inscrit dans ce même cercle.

340. Scholie ii. Si l'on élève au point O la perpendiculaire OI sur le diamètre AD, on verra que l'arc IC est le tiers du quadran ICD. Il est donc facile de partager un quadran en trois parties égales; mais c'est là le seul cas où le problème de *la trisection d'un arc* puisse être exécuté, sans employer d'autres instruments que la règle et le compas.

Problème V.

341. *Inscrire un décagone régulier dans une circonférence.*

Fig. 164. Soit AB le côté du décagone régulier : l'angle O vaudra le dixième de quatre droits, ou les $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ d'un seul : donc il restera, pour la somme des deux autres angles A et B du triangle AOB, $2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$. Mais ces angles sont égaux, puisque $AO = OB$; donc chacun d'eux vaudra $\frac{4}{5}$, et sera par conséquent double de l'angle O. Alors, si l'on partage l'angle A en deux parties égales par la droite AC, on formera deux triangles isocèles ACO et ABC : car d'abord l'angle $CAO = O$; ainsi $AC = CO$. Ensuite l'angle ACB, extérieur au triangle ACO, est double de l'angle O (**150**), et est par conséquent égal à B : donc $AC = AB$; donc le segment CO du rayon est égal au côté du décagone inscrit. Mais les triangles ABO et ABC sont équiangles, et ont ainsi leurs côtés homologues proportionnels : donc

$$AO : AC :: AB : BC,$$

ou, ce qui revient au même,

$$BO : CO :: CO : BC.$$

On voit donc que le rayon BO est partagé, au point C, en moyenne et extrême raison (**277**), et que AB est égal au plus grand de ses deux segments : donc, *pour inscrire un décagone régulier dans un cercle, on partagera le rayon en moyenne et extrême raison,*

et l'on portera le plus grand segment dix fois sur la circonférence.

Exécutons cette construction. Pour cela, je trace deux diamètres à angles droits AF et GH; du point G Fig. 165.
comme centre, avec le rayon de la circonférence, je décris deux arcs qui coupent cette circonférence en M et en N, je joins MN, et cette droite est perpendiculaire sur le milieu de GO (60); je tire IA, puis du point I comme centre je décris l'arc OK; et la droite AK, égale au plus grand segment du rayon OA divisé en moyenne et extrême raison (277), est le côté du décagone inscrit. Si donc on veut calculer ce côté, il faudra trouver la valeur de AK. Or $AK = AI - IK$: mais dans le triangle rectangle AIO nous connaissons les deux côtés de l'angle droit $OA = R$, et $OI = \frac{R}{2}$: donc

$$AI = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = \frac{R.\sqrt{5}}{2};$$

d'ailleurs $IK = IO = \frac{R}{2}$: donc, enfin,

$$AK = \frac{R.\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R.\sqrt{5} - R}{2}:$$

et, comme on peut regarder $R.\sqrt{5} - R$ comme le produit de R par $(\sqrt{5} - 1)$, on aura en définitive:

$$AK = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2};$$

d'où l'on voit que, *pour calculer le côté du décagone régulier inscrit dans une circonférence dont le rayon est donné, il faut multiplier le rayon par l'excès de la racine carrée de* 5 *sur l'unité, et diviser le produit par* 2.

342. Corollaire I. Si l'on joint les sommets du décagone de deux en deux, on formera un pentagone régulier.

* Nous allons nous proposer de calculer le côté de Fig. 166.
ce polygone. Soient AB et BC deux côtés consécutifs du

décagone régulier, de sorte que AC sera le côté du pentagone, je joins AD et je forme ainsi un triangle ABD semblable à ABF (233, 1°); la comparaison de leurs côtés homologues fournit la proportion

$$AF : AD :: AB : BD,$$

ou bien en remplaçant AF, AB et BD par leurs longueurs que je désignerai respectivement par $\frac{x}{2}$, a et 2 R,

$$\frac{x}{2} : AD :: a : 2R,$$

d'où

$$x = \frac{a.AD}{R}.$$

Or, le triangle rectangle ABD nous donne

$$AD = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{a.\sqrt{4R^2 - a^2}}{R} = \frac{\sqrt{a^2(4R^2 - a^2)}}{R}.$$

Mais a désignant le côté du décagone régulier, on a

$$a = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2},$$

d'où

$$a^2 = \frac{R^2(5 - 2\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4};$$

par suite

$$4R^2 - a^2 = 4R^2 - \frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4} = \frac{R^2(16 - 6 + 2\sqrt{5})}{4} = \frac{R^2(10 + 2\sqrt{5})}{4}.$$

En substituant ces valeurs de a^2 et $(4R^2 - a^2)$ dans celle de x, il viendra

$$x = \frac{\sqrt{R^4(6 - 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})}}{4R} = \frac{R.\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Si au carré du côté du décagone régulier, on ajoute le carré du rayon, on trouvera

$$\frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4} + R^2 = \frac{R^2(10 - 2\sqrt{5})}{4} = x^2;$$

c'est donc à dire que *le carré du côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle est égal à la somme des carrés du rayon de ce cercle et du côté du décagone régulier inscrit.*

343. COROLLAIRE II. Si l'on porte le rayon de A en D sur la circonférence, l'arc AD sera $\frac{1}{6}$ de cette circonférence; et, comme l'arc AB en est $\frac{1}{10}$, leur différence BD sera $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5-3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ de la circonférence; donc la corde de cet arc sera le côté du pentédécagone régulier inscrit; ainsi il sera facile d'inscrire ce polygone. Fig. 164.

*Pour calculer le côté du pentédécagone régulier en fonction du rayon, je tire le diamètre AF et je joins BF et DF; je formerai ainsi un quadrilatère inscrit ABDF, et en lui appliquant le théorème de *Ptolémée* (**246**), il viendra

$$AD.BF = AF.BD + AB.DF \ldots\ldots (1).$$

Or $AD=R$, $AF=2R$, DF qui est le côté du triangle équilatéral inscrit vaut $R\sqrt{3}$, et enfin le triangle rectangle ABF, nous donne

$$BF=\sqrt{4R^2-\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}}=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (1), réduisant et transposant, il viendra

$$BD=\frac{R\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right\}}{4}.$$

344. SCHOLIE. Nous savons maintenant inscrire dans la circonférence les polygones réguliers de 4, 6, 3, 10, 5 et 15 côtés; mais nous avons vu que l'on peut toujours inscrire dans une circonférence un polygone régulier qui ait deux fois plus de côtés qu'un polygone régulier déjà inscrit (**329**), et circonscrire à cette circonférence un polygone régulier d'autant de côtés qu'un polygone régulier déjà inscrit (**327**); ainsi nous sommes actuellement en état d'inscrire et de circonscrire à une circonférence donnée tout polygone régu-

lier dont le nombre des côtés est un terme de l'une des quatre progressions géométriques suivantes :

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : \ldots\ 3.2^n,$$
$$\div\ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \ldots\ 4.2^n,$$
$$\div\ 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160 : \ldots\ 5.2^n,$$
$$\div\ 15 : 30 : 60 : 120 : 240 : 480 : \ldots\ 15.2^n,$$

et calculer, au moyen des formules des nos **327** et **329**, le côté de ce polygone. Mais ce sont là les seuls polygones réguliers que la géométrie enseigne à inscrire et à circonscrire à la circonférence [1].

345. Nous ne saurons donc diviser la circonférence qu'en un nombre de parties, marqué par l'un des termes des quatre progressions ci-dessus; car l'inscription d'un polygone régulier dans une circonférence revient à la division de cette circonférence en autant de parties égales qu'il doit avoir de côtés, et réciproquement. Dans tout autre cas, il faut avoir recours au tâtonnement ou à des méthodes empiriques.

CHAPITRE II.

DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE.

Théorème I.

346. *Toute ligne qui enveloppe d'une extrémité à*
Fig. 167. *l'autre une ligne* CONVEXE *quelconque* AMB *est plus longue que celle-ci.*

---

(1) Nous observerons toutefois que l'on peut encore, *en n'employant que la règle et le compas*, inscrire à la circonférence tout polygone régulier dont le nombre des côtés est compris dans la formule ($2^n + 1$), pourvu que ce nombre soit premier. Mais les opérations deviennent si compliquées, même pour le plus simple de ces polygones, qui est celui de 17 côtés (ceux de 3 et de 5 côtés appartiennent à nos quatre progressions), qu'il vaut bien mieux avoir recours au tâtonnement.

En effet, si la ligne AMB n'est pas plus petite que toutes celles qui l'enveloppent, il existera parmi celles-ci une certaine ligne ACDB plus courte que toutes les autres. Menez entre les deux lignes AMB et ACDB une droite quelconque FG, qui ne rencontre point AMB, ou qui, du moins, ne fasse que la toucher, ce qui est possible, puisque AMB est convexe. Or la droite FG est plus petite que FCDG : donc, en ajoutant de part et d'autre AF et GB, on aura : $AFGB < ACDB$; donc il était absurde de supposer que ACDB fût la plus courte de toutes les lignes qui enveloppent AMB; et, comme on pourrait répéter le même raisonnement sur toutes les lignes qui entourent AMB, on doit en conclure que AMB est effectivement moindre que toutes les lignes qui l'enveloppent.

347. Scholie i. Remarquons que le théorème du nº **31** n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

348. Scholie ii. Remarquons encore que le raisonnement précédent conviendrait également au cas où la ligne convexe AMB serait fermée, et que la ligne enveloppante aurait avec elle un ou plusieurs points communs, ou même aucun point commun.

Théorème II.

349. *On peut toujours inscrire et circonscrire à une circonférence deux polygones réguliers semblables, tels que la différence de leurs périmètres soit moindre que toute quantité donnée, de sorte que cette circonférence est la limite vers laquelle tendent ces périmètres, lorsqu'on suppose que le nombre des côtés des deux polygones augmente indéfiniment.*

1° Soient R le rayon de la circonférence donnée, P et p les périmètres de deux polygones réguliers semblables, circonscrit et inscrit à cette circonférence, et r l'apothême du second : on aura (**326**) :

$$P : p :: R : r;$$

d'où l'on tire

$$P - p : P :: R - r : R,$$

et par conséquent

$$P - p = \frac{P(R - r)}{R}.$$

Or, si l'on inscrit et circonscrit à la circonférence des polygones réguliers semblables dont les côtés soient de deux en deux fois plus nombreux, les valeurs successives de P, quantité plus grande que la circonférence (**346**), iront constamment en diminuant; donc, si l'on peut prouver que le facteur $(R - r)$ peut être rendu moindre que toute grandeur donnée, il sera prouvé que la différence $(P - p)$ jouira aussi de la même propriété, puisque le dénominateur R est invariable. Mais $(R - r)$ ou $(OA - OK)$ est une quantité moindre que AK, c'est-à-dire moindre que la moitié du côté du polygone inscrit que l'on considère, et ce côté peut être rendu aussi petit que l'on voudra [1]: donc la différence $(P - p)$ décroît indéfiniment; à plus forte raison en est-il de même de la différence entre chacun des périmètres P et p et la circonférence proposée, puisqu'elle est moindre que le premier et plus grande que le second; donc elle est leur limite commune; donc le théorème est démontré.

Fig. 158.

350. Il suit de ce théorème et de ce que la figure d'un polygone régulier s'approche d'autant plus de celle du cercle que le nombre de ses côtés est plus grand, que *l'on peut regarder un cercle comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés.* Ces côtés se nomment les *éléments* de la circonférence, et l'on voit, d'après la définition du n° **83**, que *la tangente à la circonférence, en un point donné, n'est au-*

---

[1] En effet, les arcs sous-tendus par les côtés des polygones inscrits successifs sont les termes d'une progression par quotient dont la raison est $\frac{1}{2}$, et qui se prolonge indéfiniment : or, nous avons démontré, au n° 303 de l'Arithmétique, que le dernier terme d'une progression géométrique décroissante a zéro pour limite, lorsque la progression se prolonge indéfiniment ; donc à plus forte raison les cordes de ces arcs tendent-elles aussi vers zéro.

tre chose que le prolongement indéfini de l'élément sur lequel ce point est situé.

351. Il suit de cette nouvelle manière d'envisager le cercle qu'il doit jouir de toutes les propriétés des polygones réguliers qui sont indépendantes du nombre de leurs côtés, et que par conséquent *les circonférences de deux cercles sont proportionnelles à leurs rayons* (**312**). Mais, comme cette proposition est fort importante, nous allons en développer la démonstration.

Théorème III.

352. *Deux circonférences sont proportionnelles à leurs rayons.*

Soient R et R′ les rayons de deux circonférences, je dis qu'on aura

$$\textit{Circ.}\, R : \textit{circ.}\, R' :: R : R' \text{ (}^1\text{)}.$$

Pour le démontrer, j'inscris dans ces circonférences deux polygones réguliers semblables, et, en appelant P et P′ leurs périmètres, nous aurons

$$P : P' :: R : R',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}.$$

Or, si nous substituons à ces deux polygones d'autres polygones réguliers semblables, dont le nombre des côtés soit de plus en plus grand, P et P′ varieront, mais l'équation précédente subsistera toujours; elle aura donc encore lieu quand le nombre des côtés de nos deux polygones sera devenu infini, mais alors leurs périmètres auront atteint leurs limites respectives *circ.* R et *circ.* R′, de sorte qu'on aura

$$\frac{\textit{circ.}\, R}{R} = \frac{\textit{circ.}\, R'}{R'},$$

---

[1] Nous désignerons désormais, pour abréger, par *circ.* R et par *cer.* R la circonférence et le cercle dont le rayon est R.

car les limites de deux quantités variables, qui restent constamment égales, sont égales ([1]).

353. Corollaire i. *Deux* arcs semblables, c'est-à-dire deux arcs qui correspondent à des angles au centre égaux, *sont proportionnels à leurs rayons.*

Fig. 159. Soient, en effet, O et O′ deux angles au centre égaux, et B A C, B′A′C′ les arcs que leurs côtés interceptent sur les circonférences respectives OA et O′A′ : il suit du théorème du n° **108** que chacun de ces angles est à quatre droits comme l'arc compris entre ses côtés est à la circonférence dont il fait partie ; ainsi

$$O : 4\ \textit{droits} :: ACB : \textit{circ.}\ OA,$$
$$O' : 4\ \textit{droits} :: A'C'B' : \textit{circ.}\ O'A'.$$

Mais, comme les angles O et O′ sont égaux, ces deux proportions sont liées par un rapport commun, de sorte que l'on en tire :

$$ACB : \textit{circ.}\ OA :: A'C'B' : \textit{circ.}\ O'A',$$

ou $$ACB : A'C'B' :: \textit{circ.}\ OA : \textit{circ.}\ O'A' :: OA : O'A'.$$

354. Corollaire ii. *Les circonférences de deux cercles sont proportionnelles à leurs diamètres :* ainsi le rapport d'une circonférence quelconque à son diamètre est le même que celui de toute autre circonférence à son diamètre, et est par conséquent un nombre constant. Or le rapport de deux quantités est le quotient qu'on obtient en divisant la première par la seconde : donc,

---

([1]) Si on doutait que $\frac{\textit{circ.}\ R}{R}$ fût la limite du rapport $\frac{P}{R}$, on observerait que l'on peut toujours poser $P = \textit{circ.}\ R - \alpha$, α étant une quantité variable susceptible de décroître indéfiniment. On tire de cette équation $\frac{P}{R} = \frac{\textit{circ.}\ R}{R} - \frac{\alpha}{R}$, et comme α tend vers zéro, à mesure que le nombre des côtés du polygone devient plus grand, on en conclut que la limite du second membre de cette équation est $\frac{\textit{circ.}\ R}{R}$; donc $\lim. \frac{P}{R} = \frac{\textit{circ.}\ R}{R}$.

Si l'on multiplie LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE *par le diamètre d'une circonférence, on aura la longueur de cette circonférence;*

Et, *si l'on divise la longueur d'une circonférence par le rapport de la circonférence au diamètre, on aura celle de son diamètre.*

Nous conviendrons désormais de représenter le rapport de la circonférence au diamètre par la lettre π; et alors, si l'on désigne par R la longueur du rayon d'une circonférence, nous exprimerons les deux règles précédentes par les formules

$$circ.\,\mathrm{R} = 2\pi.\mathrm{R}, \text{ et } 2\mathrm{R} = \frac{circ.\,\mathrm{R}}{\pi}.$$

Occupons-nous maintenant de la détermination de ce nombre π. La solution que nous allons donner de ce problème est fondée sur celle du suivant.

Problème I.

355. *Étant donnés les périmètres de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, calculer les périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.*

1° Soient AB et CD les côtés de nos deux polygones, dont nous désignerons les périmètres par p et par P; je joins le point A au point de contact E et je mène aux points A et B les tangentes AF et BG: AE et FG seront les côtés des polygone inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés. J'appelle p' et P' les périmètres de ces polygones. D'après le théorème du n° **326**, nous aurons Fig. 168.

$$\mathrm{P} : p :: \mathrm{CO} : \mathrm{OE},$$

car OE = OA. Mais si l'on tire OF, cette droite sera la bissectrice de l'angle COE, de sorte que

$$\mathrm{CO} : \mathrm{OE} :: \mathrm{CF} : \mathrm{FE};$$

donc, à cause du rapport commun,

$$\mathrm{P} : p :: \mathrm{CF} : \mathrm{FE}.$$

On tire de cette proportion

$$P+p:2p::CE:FG.$$

Mais les droites CE et FG sont contenues chacune le même nombre de fois dans les périmètres P et P′, dont elles font partie; donc

$$P+p:2p::P:P',\ \text{d'où}\ P'=\frac{2Pp}{P+p}\ldots.(1).$$

2°. Pour calculer p', je remarque que les deux triangles FEI et AEK sont équiangles, et qu'ainsi

$$EI:FE::AK:AE;$$

mais les droites EI et FE sont contenues le même nombre de fois dans les périmètres p' et P′; le rapport de AK à AE est aussi le même que celui de p à p'; donc

$$p':P'::p:p',\ \text{d'où}\ p'=\sqrt{P'p}\ldots.(2).$$

Problème II.

356. *Trouver le rapport de la circonférence au diamètre.*

Le rapport de la circonférence au diamètre étant le même pour toutes les circonférences possibles, nous considérerons celle dont le rayon est l'unité linéaire: son diamètre sera 2. Si donc nous pouvons calculer la longueur de cette circonférence, en en prenant la moitié, nous aurons résolu le problème. Ainsi la question est ramenée à *calculer la longueur de la circonférence dont le rayon est l'unité linéaire.*

Les formules que nous venons d'obtenir fournissent le moyen de calculer cette longueur, sinon exactement, du moins avec tel degré d'approximation que l'on voudra; car, si l'on demande la valeur de π *à moins d'un millième près,* par exemple, on n'aura qu'à inscrire et à circonscrire à la circonférence dont le rayon est l'unité, deux polygones réguliers semblables, dont les périmètres différeront au plus de *quatre millièmes.* Mais notre circonférence sera comprise entre l'un de

ces périmètres et leur *moyenne différentielle :* donc elle différera de cette moyenne de moins de deux millièmes; par conséquent, en prenant la moitié de cette moyenne, on aura le rapport de la circonférence au diamètre *à moins d'un millième près,* comme on le demande. Occupons-nous donc du calcul des périmètres de nos deux polygones.

Nous commencerons par inscrire dans notre circonférence l'un des polygones réguliers que nous savons y inscrire; et, comme le côté de l'hexagone est égal au rayon, et par conséquent à 1, dans notre hypothèse, nous partirons de ce polygone dont le périmètre sera 6. Nous pourrons ensuite, au moyen de la formule

$$x=\frac{2\mathrm{R}.a}{\sqrt{4\mathrm{R}^2-a^2}}$$

du n° **327**, calculer le côté de l'hexagone régulier circonscrit, en y faisant $\mathrm{R}=a=1$. On trouvera ainsi pour valeur de ce côté :

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Multipliant par 6 les valeurs des côtés de ces hexagones, on aura celles de leurs périmètres :

$$\mathrm{P}_6=\frac{12}{\sqrt{3}}=\sqrt{48}=6{,}9282 \text{ et } p_6=6.$$

Mais comme la différence de ces périmètres surpasse 0,004, on devra passer aux polygones de 12 côtés.

On substituera donc les valeurs trouvées pour les périmètres des hexagones dans les formules (2) et (1) du n° **353**, ce qui donnera

$$\mathrm{P}_{12}=24(2-\sqrt{3}) \text{ et } p_{12}=12\sqrt{12-\sqrt{3}},$$

pour la mesure des périmètres des dodécagones circonscrit et inscrit; et si la différence de ces mesures surpasse 0,004, on passera successivement aux polygones de 24, 48, 96, etc., côtés, jusqu'à ce que l'on arrive à deux polygones semblables, dont la différence des périmètres ne surpasse point quatre millièmes, ce

qui est possible (**349**) : il n'y aura plus alors qu'à additionner ces deux périmètres, et à prendre le quart de la somme. On a trouvé que les périmètres des polygones de 96 côtés étaient :

$$\begin{array}{r} 6,282 \\ 6,285 \\ \hline \end{array}$$

Somme.... 12,567 d'où..... $\pi = 3,141$.

Telle est donc la valeur du rapport de la circonférence au diamètre, exacte à moins d'un millième.

Si l'on voulait avoir exactement le chiffre des millièmes, il faudrait pousser le calcul jusqu'à ce qu'on arrivât à deux polygones dont les périmètres eussent les trois premières décimales communes, et négliger les décimales ultérieures.

Legendre a démontré que *non-seulement le rapport de la circonférence au diamètre était incommensurable, mais que son carré même l'était aussi* : de sorte qu'on ne peut l'obtenir qu'avec une approximation plus ou moins grande. Au moyen d'une méthode plus expéditive que la précédente, on a poussé le calcul de la valeur de π jusqu'à 154 décimales, et il est facile de voir qu'en employant cette valeur pour calculer la circonférence d'un cercle dont le rayon serait la distance moyenne de la terre au soleil, c'est-à-dire de plus de 152 millions de kilomètres, l'erreur serait bien moindre que l'épaisseur d'un cheveu.

La valeur de π exacte à moins d'une demi-unité du dixième ordre décimal est

$$\pi = 3,14159\,26536,$$

et elle a pour logarithme

$$L.\pi = 0,49714\,98727.$$

En réduisant cette valeur de π en fraction continue, et formant ensuite les réduites, on a trouvé les deux valeurs suivantes de ce rapport :

$$\pi = \tfrac{22}{7}, \text{ et } \pi = \tfrac{355}{113}.$$

Le premier est dû à *Archimède*, et est exact à moins

de *deux millièmes* près. Le second a été découvert par *Métius*, dont il a conservé le nom. Il n'est pas fautif d'*un demi-millionième :* aussi est-il fréquemment employé. Il est d'ailleurs facile à retenir, en observant que, si l'on écrit deux fois chacun des trois premiers nombres impairs 1, 3, 5 de cette manière 113355, les deux moitiés de ce nombre 113 et 355 sont précisément les deux termes de ce rapport.

337. La géométrie élémentaire ne fournit pas de méthode pour *rectifier la circonférence*, c'est-à-dire pour trouver une ligne droite qui soit *rigoureusement* égale en longueur à une circonférence donnée. Aussi, pour résoudre ce problème, qui se présente souvent dans la pratique des arts, il faut avoir recours aux méthodes d'approximation. Si l'on veut faire usage du rapport d'Archimède, on tirera par l'extrémité A d'un Fig. 169.
diamètre AB, une droite quelconque sur laquelle on portera 22 fois une même ouverture de compas, on joindra le 7e point de division avec l'autre extrémité B du diamètre, et, en menant par la 22e une parallèle à cette ligne de jonction, on déterminera sur la direction du diamètre une longueur AC sensiblement égale à la circonférence proposée.

LIVRE V.

DES AIRES DES SURFACES PLANES ET DE LEUR COMPARAISON.

CHAPITRE PREMIER.

DES AIRES DES SURFACES PLANES.

358. *La* MESURE *d'une surface est le rapport de cette surface à une autre que l'on prend pour* UNITÉ. Cette mesure est ce qu'on appelle *l'*AIRE *de la surface.* Dans toute la suite de cet ouvrage, *nous prendrons pour unité superficielle le carré dont le côté est l'unité linéaire;* de sorte que *l'aire d'une surface sera le rapport de cette surface au carré qui a pour côté l'unité de longueur.*

THÉORÈME I.

359. *Les aires de deux rectangles de même base sont proportionnelles à leurs hauteurs.*

Soient, en effet, ABCD et FGIK deux rectangles que nous désignerons pour plus de simplicité par AC et par FI, et dont les bases AB et FG sont égales.

Fig. 170. 1° Supposons d'abord que les hauteurs AD et FK soient commensurables et que leur commune mesure soit contenue 8 fois dans AD et 3 fois dans FK : le rapport de ces deux droites sera $\frac{8}{3}$. Si par tous les points de division de AD et de FK on mène des parallèles à AB et à FG, on aura partagé les rectangles AC et FI respectivement en 8 et en 3 parties égales, et comme les parties du premier sont égales à celles du second, car ce sont des rectangles superposables (**181**), on voit que le rapport de AC à FI sera aussi $\frac{8}{3}$; donc

AC : FI :: AD : FK.

2° Supposons actuellement que les hauteurs AD et FK soient incommensurables. Je partage FK en un nombre quelconque de parties égales, et je porte l'une de ces parties sur AD autant de fois qu'elle pourra y être contenue. Soit DO le reste que je trouve ainsi; je tire OP parallèlement à AB, et comme les droites AO et FK sont commensurables, j'aurai Fig. 171.

$$\frac{AP}{FI}=\frac{AO}{FK},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{AC-OC}{FI}=\frac{AD-OD}{FK}.$$

Or, OC et OD sont deux quantités variables qui tendent vers zéro à mesure que le nombre des parties dans lesquelles on divise FK est plus grand; donc les rapports variables $\frac{AC-OC}{FI}$ et $\frac{AD-OD}{FK}$ tendent respectivement vers les limites $\frac{AC}{FI}$ et $\frac{AD}{FK}$; mais ces rapports variables sont constamment égaux, donc leurs limites sont égales; donc

$$\frac{AC}{FI}=\frac{AD}{FK}, \text{ ou bien } AC:FI::AD:FK,$$

ce qu'il fallait démontrer [1].

---

[1] Portons la hauteur KF du second rectangle sur celle AD du premier autant de fois que la chose sera possible. Nous trouverons qu'elle y est contenue *deux* fois avec le reste OD, de sorte que Fig. 171.

$$AD=2KF+OD.$$

Mais si par les points de division M et O nous menons des parallèles à AB, nous formerons les rectangles AN et MP respectivement égaux à FI : car il est évident que ces trois rectangles sont superposables; donc

$$AC=2FI+OC.$$

On voit donc que le rectangle AC contient le rectangle FI autant de fois que la hauteur AD contient la hauteur FK, et que le rectangle restant OC a pour hauteur le reste OD. Par

360. Scholie. On peut dire aussi que *deux rectangles de même hauteur sont proportionnels à leurs bases :* car les noms de base et de hauteur s'appliquent indifféremment à chacun des deux côtés contigus d'un rectangle.

Théorème II.

361. *Les aires de deux rectangles quelconques sont proportionnelles aux produits de leurs bases par leurs hauteurs;* c'est-à-dire aux produits des nombres abstraits qui expriment les longueurs respectives de ces lignes.

Soient R et R′ les aires des deux rectangles proposés; b et h, b' et h', les longueurs de leurs bases et leurs hauteurs respectives. Construisons un troisième rectangle R″ qui ait même base b que le premier, et même hauteur h' que le second. Alors, si nous le comparons successivement aux rectangles R et R′, nous aurons, d'après le théorème précédent et d'après sa scholie, les proportions

$$\left.\begin{array}{l} R : R'' :: h : h' \\ R'' : R' :: b : b' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1) :$$

---

conséquent, si l'on porte à son tour OD sur FK, et que par les points de division on mène des parallèles à FG, on verra que le rectangle FI contiendra le rectangle OC autant de fois que la hauteur FK contiendra la hauteur OD, et que le rectangle restant aura pour hauteur la partie restante de FK; et ainsi de suite, si l'on continue d'effectuer sur les hauteurs AD et FK, et sur les rectangles AC et FI, les opérations nécessaires pour trouver la commune mesure des deux premières quantités et celle des deux autres. Les deux séries de quotients que l'on trouvera ainsi seront donc les mêmes; par conséquent, si l'on développe en fraction continue le rapport des deux rectangles AC et FI et celui de leurs hauteurs AD et FK, on trouvera la même expression (30); donc ces deux rapports sont égaux; donc on a la proportion

$$AC : FI :: AD : FK,$$

ce qu'il fallait démontrer.

d'où, en multipliant ces deux proportions par ordre, et supprimant le facteur R″ commun aux deux termes du premier rapport de la proportion-produit,

$$R : R' :: b.h : b'.h',$$

ce qui démontre notre théorème ([1]).

Théorème III.

362. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*, c'est-à-dire que le rapport de ce rectangle au carré qui a pour côté l'unité linéaire, est égal au produit des deux *nombres abstraits* qui expriment les rapports respectifs de sa base et de sa hauteur à cette unité linéaire.

Désignons, en effet, par R le rectangle à mesurer; par b et par h les longueurs respectives de sa base et de sa hauteur; par Q le carré que l'on prend pour unité de superficie : la base et la hauteur de ce carré seront donc égales chacune à l'unité linéaire; donc, en vertu du théorème précédent, le rapport du rectangle R au carré Q sera égal au rapport du produit $b.h$ au produit 1.1, c'est-à-dire à $b.h$; ainsi

$$\frac{R}{Q} = b.h.$$

Mais le rapport $\frac{R}{Q}$ est ce que nous appelons l'aire du rectangle R (358) : donc cette aire est égale au produit des deux nombres abstraits qui expriment les rapports de la base et de la hauteur du rectangle à

([1]) Remarquons que dans les proportions (1) on pourrait bien regarder les lettres R, R′, R″, comme représentant des rectangles, et b, b', h, h' comme représentant des lignes, puisque les deux termes de chaque rapport sont alors des quantités homogènes; mais que, pour pouvoir multiplier ces proportions par ordre, il devient indispensable de regarder ces lettres comme représentant les nombres abstraits qui expriment les rapports de chacune de ces quantités à l'unité de son espèce. Il serait absurde en effet de prétendre multiplier un rectangle par un autre rectangle.

l'unité linéaire; donc *l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

363. On peut rendre cette proposition évidente de la manière suivante, lorsque les dimensions des rectangles que l'on considère sont commensurables avec l'unité linéaire. Supposons, en effet, que la base et la
Fig. 172. hauteur du rectangle ABCD soient respectivement égales à $3^{m}\frac{6}{10}$ et à $2^{m}\frac{45}{100}$. Je prends, sur AB, 3 parties égales à un mètre, et, sur AD, 2 parties égales aussi à un mètre, de sorte que $EB = \frac{6^{m}}{10}$ et que $Dd = \frac{45^{m}}{100}$; puis par les points de division de la base et de la hauteur de notre rectangle, je mène des parallèles à ses côtés. Le rectangle Ae vaudra 3 mètres carrés, et le rectangle Eb sera les $\frac{6}{10}$ d'un mètre carré (359); ainsi le rectangle Ab contient $3^{m.q}\frac{5}{10}$; par conséquent le rectangle Ac vaut $3^{m.q}\frac{6}{10} \times 2$. Mais le rectangle dC est les $\frac{45}{100}$ du rectangle Ab (359), et vaut ainsi $3^{m.q}\frac{6}{10} \times \frac{45}{100}$: donc le rectangle total vaut $3^{m.q}\frac{6}{10} \times 2 + 3^{m.q}\frac{6}{10} \times \frac{45}{100} = (3\frac{6}{10} \times 2\frac{45}{100})$ mètres carrés, c'est-à-dire le produit de sa base par sa hauteur.

Théorème IV.

364. *L'aire d'un carré a pour mesure la seconde puissance de son côté.*

En effet, le carré étant un rectangle dont les deux dimensions sont égales, son aire sera égale à la seconde puissance de l'une d'elles [1].

365. Corollaire 1. Si l'on observe que les carrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5.... sont respectivement 1, 4, 9, 16, 25...., on verra que le carré construit sur

---

[1] Ainsi, lorsque l'on forme la seconde puissance d'un nombre, on exécute l'opération nécessaire pour évaluer l'aire du carré dont le côté contiendrait précisément ce nombre-là d'unités linéaires. C'est pour cela qu'on a appelé carré d'un nombre la seconde puissance de ce nombre.

C'est par une raison semblable que l'on emploie l'expression *rectangle de deux nombres*, pour désigner leur produit.

une ligne double, triple, quadruple, quintuple, etc., d'une autre, sera 4, 9, 16, 25...... fois plus grand que celui fait sur cette autre.

Réciproquement, pour faire un carré qui soit 4, 9, 16, 25......... fois plus petit qu'un autre, il faudra le construire sur une droite qui soit 2, 3, 4, 5....... fois moins grande que le côté de cet autre carré.

366. Corollaire ii. En France, où le mètre est l'unité linéaire, *l'unité de superficie est le* mètre carré. *Cette unité se subdivise en cent décimètres carrés* (**358** et **364**). *Le décimètre carré vaut cent centimètres carrés, et le centimètre carré vaut cent millimètres carrés.*

Il suit de là que, *pour convertir un nombre quelconque de mètres carrés en* décimètres carrés, *ou en* centimètres carrés, *ou en* millimètres carrés, *il suffit d'avancer la virgule de* deux, *ou de* quatre, *ou de* six *rangs vers la droite.*

Exemple. Quelle est, en mètres carrés, décimètres carrés, centimètres carrés et millimètres carrés, l'aire d'un rectangle dont la base a $2^{m},36$, et la hauteur $1^{m},234$?

Je multiplie entre eux les deux nombres *abstraits* 2,36 et 1,234, ce qui donne pour produit 2,91224: ainsi l'aire demandée égale $2^{m.q},91224$, c'est-à-dire *deux mètres carrés quatre-vingt-onze mille deux cent vingt-quatre cent-millièmes de mètre carré, ou 2 mètres carrés 91 décimètres carrés 22 centimètres carrés et 40 millimètres carrés.*

Autrefois l'unité linéaire était la *toise* de Paris, dont le rapport au mètre est à peu près 1,94904. Elle se subdivisait en 6 pieds, le pied en 12 pouces, et le pouce en 12 lignes. En conséquence, *l'unité de surface était la* toise carrée, *laquelle valait* 36 pieds carrés (**364**). *Le pied carré se composait de* 144 pouces carrés, *et le pouce carré de* 144 lignes carrées.

Lorsque les dimensions d'un rectangle sont évaluées en toises et fractions de toise, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est de convertir chacune en unités du dernier ordre. Par exemple, si la base d'un rectangle est de $9^t\ 5^p\ 7^p$, et sa hauteur de $3^t\ 4^p$, on prendra le pouce pour unité linéaire, et par conséquent le pouce carré pour unité superficielle; on convertira la base et la hauteur en pouces; et, en multipliant entre eux les deux nombres ainsi trouvés, 715 et 264, on verra que l'aire de notre rectangle est 188760 pouces carrés; et, comme $1^{p.q} = 144^{p.q}$, on convertira cette aire en pieds carrés en divisant 188760 par 144, ce qui donnera $1310^{p.q} + 120^{p.q}$. Mais la toise carrée vaut $36^{p.q}$: donc, en divisant 1310 par 36, on saura combien il y a de toises carrées dans notre rectangle. En effectuant cette division, on trouvera pour sa mesure $36^{t.q} + 14^{p.q} + 120^{p.q}$.

Théorème V.

Fig. 173. **367**. *Deux parallélogrammes* AC *et* AF *de même base* AB *et de même hauteur* FE *sont équivalents.*

Puisque les deux parallélogrammes AC et AF ont la même base inférieure AB et la même hauteur FE, leurs bases supérieures DC et GF doivent se trouver sur une même ligne droite GFDC (**67**).

Cela posé, les triangles GAD et FBC ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, car GA = FB comme côtés opposés d'un même parallélogramme AF; par la même raison, AD = BC; de plus l'angle GAD est égal à FBC, puisque ces angles ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens : donc le triangle GAD est égal au triangle FBC. Mais si l'on retranche le premier du trapèze ABCG, il reste le parallélogramme AC; et si l'on retranche le second triangle FBC du même trapèze, il reste le parallélogramme AF; donc ces deux parallélogrammes sont équivalents; car il est évident que si d'une même figure on retranche des surfaces égales, les figures restantes

auront des surfaces égales, et seront par conséquent équivalentes (**147**).

368. Corollaire. *L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, tout parallélogramme est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur (**367**) : donc l'aire du parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur (**362**).

Théorème VI.

369. *Tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que lui.*

En effet, si nous menons par les sommets des angles B et C du triangle ABC des parallèles BD et CD aux côtés qui leur sont opposés, nous formerons un parallélogramme ABCD de même base et de même hauteur que ce triangle, et sa diagonale BC le décompose en deux triangles égaux (**174**). Fig. 70.

370. Corollaire i. *L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur* (**367**).

371. Corollaire ii. *Les aires de deux triangles quelconques sont entre elles* comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, et par conséquent *comme leurs bases, si ces triangles ont même hauteur, ou comme leurs hauteurs, s'ils ont même base.*

Théorème VII.

372. *L'aire d'un triangle est égale à la racine carrée du produit qu'on obtient en multipliant son demi-périmètre successivement par l'excès de ce demi-périmètre sur chacun des côtés.*

Soit ABC le triangle proposé. Désignons par a, b, c, Fig. 110. les longueurs respectives des côtés BC, AC et AB; et par h celle de sa hauteur AI. Il est clair que si l'on connaissait l'un des segments de la base, BI, par exemple, on pourrait, au moyen du théorème de Pythagore (**233**, 4°), calculer cette hauteur, et obtenir ainsi

l'aire de notre triangle. Or, on sait que dans tout triangle le carré du côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres diminuée du double produit de l'un de ces deux côtés par la projection de l'autre sur lui (238). Puis donc que BI est la projection du côté AB sur BC, nous aurons :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC.BI,$$

ou

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2a.BI.$$

b^2 étant ainsi l'excès de $c^2 + a^2$ sur $2a.BI$, on aura la valeur de cette quantité en retranchant b^2 de $c^2 + a^2$, de sorte que

$$2a.BI = c^2 + a^2 - b^2.$$

Cette égalité exprime que $c^2 + a^2 - b^2$ est le produit de $2a$ par BI : donc, en le divisant par le facteur $2a$, on aura l'autre facteur BI; ainsi

$$BI = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

Nous connaissons donc maintenant, dans le triangle rectangle ABI, l'hypoténuse AB et le côté BI : donc, en lui appliquant le théorème de Pythagore, nous aurons :

$$h^2 = c^2 - \frac{(c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2},$$

en réduisant l'entier c^2 et la fraction qui l'accompagne en une seule fraction. Or, le numérateur de cette dernière fraction est la différence des carrés de $2ac$ et de $(c^2 + a^2 - b^2)$; et, comme on démontre dans l'algèbre que *la différence des carrés de deux quantités est égale à la somme de ces quantités multipliée par leur différence*, et que, *pour soustraire une quantité d'une autre, il suffit de l'écrire à sa suite avec des signes contraires à ceux dont elle est affectée*, on verra que ce numérateur revient à

$$(2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - c^2 - a^2 + b^2).$$

Mais $2ac + c^2 + a^2 = (a + c)^2$: ainsi la quantité comprise dans la première parenthèse revient à

$(a+c)^2 - b^2$, c'est-à-dire à $(a+c+b)(a+c-b)$, puisqu'elle est la différence des carrés de $(a+c)$ et de b. La seconde parenthèse $2ac - c^2 - a^2 + b^2$, peut être considérée comme ce qui reste, lorsque de b^2 on retranche $a^2 + c^2 - 2ac$, c'est-à-dire le carré de $(a-c)$: elle est donc la différence des carrés de b et de $(a-c)$, et revient par conséquent à

$$(b+a-c)(b-a+c).$$

D'après ces transformations la valeur trouvée pour h^2 deviendra :

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}.$$

Si l'on représente le demi-périmètre du triangle par p, et par conséquent son périmètre par $2p$, on aura :

$$a+b+c=2p;$$

et, en retranchant successivement $2a$, $2b$ et $2c$ de part et d'autre, il viendra :

$$b+c-a=2(p-a),$$
$$a+c-b=2(p-b),$$
$$a+b-c=2(p-c);$$

donc, en substituant dans l'expression de h^2, et divisant ensuite les deux termes de la fraction par 4,

$$h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2};$$

partant

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \ldots . (1).$$

En multipliant enfin cette quantité par $\frac{a}{2}$, on trouvera pour expression de l'aire A d'un triangle en fonction de ses côtés :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

ce qui nous apprend que, *pour calculer l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés, il faut du demi-périmètre du triangle retrancher successivement cha-*

cun de ses côtés, multiplier les trois restes entre eux et par le demi-périmètre, et extraire la racine carrée du produit.

Si l'on veut appliquer les logarithmes au calcul de la valeur de A, on aura :

$$L.\mathrm{A} = \frac{L.p + L.(p-a) + L.(p-b) + L.(p-c)}{2},$$

formule qu'il est également facile de traduire en langage ordinaire.

Exemple. Les trois côtés d'un triangle valent respectivement 1370^{m},34; 1827^{m},12; 2283^{m},9 : quelle est son aire?

Je représente ces trois côtés respectivement par a, b, c, et leur somme par $2p$, et j'exécute les calculs ci-dessous :

$$\begin{aligned}
a &= 1370^{m},34 \\
b &= 1827,12 \\
c &= 2283,90 \\
\hline
2p &= 5481,36 \\
p &= 2740,68 & L.p &= 3,4378584 \\
p-a &= 1370,34\ldots\ldots & L.(p-a) &= 3,1368284 \\
p-b &= 913,56\ldots\ldots & L.(p-b) &= 2,9607371 \\
p-c &= 456,78\ldots\ldots & L.(p-c) &= 2,6597071 \\
& & &\overline{12,1951310} \\
& & L.\mathrm{A} &= 6,0975655 \\
& & \mathrm{A} &= 1251888
\end{aligned}$$

Ainsi l'aire du triangle est de 1251888$^{m.q}$, à moins d'un mètre carré près.

Théorème VIII.

373. *L'aire d'un triangle est égale à son périmètre multiplié par la moitié de son apothème.*

Fig. 174. Si l'on joint, en effet, le centre du cercle inscrit au triangle avec ses trois sommets, on le partagera en trois autres qui auront pour bases respectives les côtés de ce triangle, et pour hauteur commune son apothème :

ainsi leurs aires seront égales à ces côtés multipliés chacun par la moitié de cet apothême. Or, dans l'addition de ces aires partielles, on pourra mettre la moitié de l'apothême en facteur commun, et l'on trouvera ainsi, pour expression de l'aire demandée, la somme des côtés du triangle, ou son périmètre par la moitié de son apothême.

Théorème IX.

374. *Le produit des trois côtés d'un triangle est égal au double de son aire multiplié par le diamètre du cercle circonscrit.*

Par un des sommets C du triangle menons le dia- Fig. 175.
mètre CD, joignons AD, et abaissons du sommet de l'angle A la perpendiculaire AF sur le côté opposé BC. Les deux triangles DAC, BAF, sont équiangles; car ils sont rectangles, l'un en A, l'autre en F; et les angles D et B sont égaux comme inscrits dans le même segment CBDA : ainsi leurs côtés homologues sont proportionnels, et l'on a

$$DC:AB::AC:AF;$$

d'où, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens,

$$AB.AC=AF.DC.$$

En multipliant ces deux produits chacun par BC, il viendra :

$$BC.AB.AC=BC.AF.DC,$$

égalité qui démontre notre proposition : car BC.AF est le double de l'aire du triangle ABC, et DC est le diamètre du cercle circonscrit.

Théorème X.

375. *L'aire d'un trapèze* AC *a pour mesure la* Fig. 68.
demi-somme de ses bases parallèles AB *et* CD, *multipliée par sa hauteur* DE.

Tirons, en effet, la diagonale DB : nous partagerons notre trapèze en deux triangles ADB et BCD;

et il est clair qu'en faisant la somme de leurs aires, nous aurons celle du trapèze ABCD.

Or, le triangle ABD a évidemment pour mesure la moitié de sa base AB, multipliée par sa hauteur DE,

$$\tfrac{1}{2}\,AB.DE.$$

Le triangle BCD a de même pour mesure

$$\tfrac{1}{2}\,DC.DE:$$

car la perpendiculaire que l'on abaisserait de son sommet B sur la base DC serait égale à DE, comme parallèles comprises entre parallèles. Additionnant ces deux produits, et mettant DE en facteur commun, il viendra :

$$(\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}DC).DE \text{ ou } \frac{AB+DC}{2}.DE,$$

c'est-à-dire la demi-somme des bases parallèles du trapèze multipliée par sa hauteur.

376. Corollaire. Si par le milieu G du côté AD nous menons GLK parallèle aux bases AB et CD, nous formerons le triangle DGL, semblable à DAB : ainsi les côtés homologues de ces triangles seront proportionnels. Mais DG est la moitié de DA : donc DL et GL sont les moitiés respectives de DB et de AB; donc, *si par le milieu de l'un des côtés d'un triangle on mène une parallèle à l'un des deux autres côtés, elle sera la moitié de ce côté, et passera par le milieu du troisième.* Il suit de là que le point K sera le milieu de CB, et que LK sera la moitié de CD : donc GK est la demi-somme des deux bases AB et DC ; donc, *si par le milieu de l'un des côtés non parallèles d'un trapèze on mène une parallèle aux bases, cette droite passera par le milieu de l'autre côté, et sera la demi-somme des deux bases.*

On peut donc dire que *l'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles multipliée par sa hauteur.*

377. Il sera facile, en s'appuyant sur la formule (1) du n° **372**, de calculer la surface d'un trapèze en fonc-

tion de ses côtés. Supposons, par exemple, que les côtés parallèles AB et CD soient respectivement de 10^m et de 6^m, et les deux autres AD et BC de 3^m et de 5^m. Je mène DO parallèle à CB : cette droite vaudra par conséquent 5^m, et AO en vaudra $10 - 6 = 4$. Alors le périmètre du triangle ADO sera 12^m, et l'on aura : $p = 6$, $p - AO = 2$, $p - DO = 1$, $p - AD = 3$; donc, en vertu de la formule (1) du n° **372**, $h = \frac{2}{4}\sqrt{6.2.1.3} = 3$, ce qu'on aurait pu prévoir, puisque les côtés DA AO et OD du triangle ADO étant respectivement de 3, 4 et 5 mètres, l'angle A est alors droit (**239**, 3°). L'aire de notre trapèze aura donc pour mesure

$$\frac{10+6}{2}.\,3 = 24^{m.q.}$$

Théorème XI.

378. *L'aire d'un polygone régulier quelconque est égale à son périmètre multiplié par la moitié de son apothême.*

Si l'on joint, en effet, le centre du cercle inscrit au polygone avec chacun de ses sommets, on le partagera en autant de triangles qu'il a de côtés : de sorte qu'en additionnant les aires de tous ces triangles, on aura celle du polygone proposé. Or ces triangles auront pour bases respectives les différents côtés du polygone, et pour hauteur commune son apothême : ainsi chacun d'eux aura pour mesure le côté du polygone qui lui sert de base multiplié par la moitié de cet apothême. Dans l'addition de ces aires partielles on pourra mettre la moitié de l'apothême en facteur commun, et alors on trouvera, pour l'expression de l'aire demandée, la somme des côtés du polygone, c'est-à-dire son périmètre multiplié par la moitié de son apothême.

379. Corollaire. Cette mesure de l'aire d'un polygone régulier étant indépendante du nombre de ses côtés doit, par conséquent, convenir au cercle (**350**) : donc *l'aire d'un cercle a pour mesure le produit de*

sa circonférence multipliée par la moitié de son rayon. Nous allons démontrer ce théorème, indépendamment des considérations du n° 350.

Théorème XII.

380. *L'aire d'un cercle est égale au produit de la circonférence multipliée par la moitié du rayon,* c'est-à-dire que

$$Cerc.\, R = circ.\, R \times \tfrac{1}{2} R.$$

En effet, si l'on circonscrit un polygone régulier quelconque au cercle proposé, et que l'on désigne par A et par P l'aire et le périmètre de ce polygone, on aura

$$A = P . \tfrac{1}{2} R.$$

Or, si l'on circonscrit à notre cercle d'autres polygones réguliers dont le nombre des côtés soit de plus en plus grand, A et P varieront, mais l'équation précédente subsistera toujours : elle aura donc encore lieu quand le nombre des côtés de notre polygone sera devenu infini; mais alors A et P auront atteint leurs limites respectives *cerc.*R et *circ.*R, de sorte qu'on aura

$$Cerc.\, R = circ.\, R \times \tfrac{1}{2} R,$$

car les limites de deux quantités variables, qui restent constamment égales, sont égales [1].

381. Corollaire i. Il suit de là et de la règle donnée pour calculer la circonférence d'un cercle en fonction de son rayon (354) que l'on aura, pour expression de l'aire du cercle, $2\,\pi . R . \frac{1}{2} R = \pi . R^2$; ainsi

---

[1] Si l'on doutait que *circ.* $R \times \frac{1}{2} R$ fût la limite du produit $P \times \frac{1}{2} R$, on observerait que $P = circ. R + \alpha$, α étant une quantité variable susceptible de décroître indéfiniment. On tire de cette équation $P . \frac{1}{2} R = circ.\, R \times \frac{1}{2} R + \frac{\alpha R}{2}$; et comme α tend vers zéro, à mesure que le nombre des côtés du polygone devient plus grand, on en conclut que la limite du second membre de cette équation est *circ.* $R \times \frac{1}{2} R$; donc *lim.* $P \times \frac{1}{2} R = circ.\, R \times \frac{1}{2} R$.

$$Cerc.\ R = \pi . R^2;$$

donc, *pour calculer l'aire d'un cercle, il faut multiplier le rapport de la circonférence au diamètre par le carré du rayon.*

Veut-on, par exemple, l'aire d'un cercle de trois mètres de rayon, à moins d'un centimètre carré : on observera que l'expression de cette aire étant 9π, pour que l'erreur soit moindre qu'un centimètre carré, c'est-à-dire que $\frac{1}{10000}$ de mètre carré, il faudra, conformément à la règle donnée au n° **308** de notre Arithmétique, prendre la valeur de π à moins de $\frac{1}{900000}$. On aura ainsi $9\pi = 3{,}141592 \times 9 = 28{,}274328$; et comme le cinquième chiffre est moindre que 9, on en conclut que $28^{m.q.},2743$ est l'aire de notre cercle, à moins d'un centimètre carré près.

382. Corollaire ii. Il suit encore du théorème précédent que, *pour trouver la* QUADRATURE DU CERCLE, c'est-à-dire pour construire un carré équivalent à un cercle donné, *il ne s'agit que de chercher une moyenne proportionnelle entre la moitié de la circonférence de ce cercle et son rayon*, et l'on aura ainsi le côté du carré demandé. Mais, comme nous n'avons pas de moyen géométrique pour rectifier la circonférence (**357**), il s'ensuit que nous n'en avons pas non plus pour trouver la quadrature du cercle. Quoiqu'on n'ait pas encore démontré qu'il soit impossible de résoudre ce problème, *en n'employant que la règle et le compas*, néanmoins l'inutilité de toutes les tentatives que, depuis plus de deux mille ans, on a faites pour y parvenir, doit nous faire penser que ce problème n'est pas du ressort de la géométrie élémentaire.

Le calcul permet de résoudre ce problème avec une exactitude presque indéfinie; car nous avons vu que l'on a poussé la détermination de la valeur du rapport de la circonférence au diamètre jusqu'à 154 décimales. Veut-on, par exemple, à moins d'un millième près, le côté du carré équivalent au cercle dont le rayon serait

de 3^m : comme sa valeur est alors $\sqrt{9\pi}$, on prendra la valeur de π exacte à moins d'une unité du huitième ordre décimal, et l'on en déduira $9\pi = 28{,}274328$, valeur qui n'est pas fautive d'un millionième. En en extrayant la racine carrée, on trouvera, pour le côté du carré demandé, $5^m{,}317$.

Théorème XIII.

Fig. 176. **383.** *L'aire d'un* SECTEUR AMBO (on appelle ainsi la portion d'un cercle comprise entre un arc et les deux rayons menés à ses extrémités) *est égale à l'arc* AMB, *qui lui sert de base, multiplié par la moitié du rayon* AO.

En raisonnant, en effet, comme nous l'avons fait au n° **108**, on démontrera que l'aire d'un secteur est à celle du cercle comme l'arc qui lui sert de base est à la circonférence : de sorte qu'en représentant par A l'aire d'un secteur, par a la longueur de son arc, et par R celle du rayon du cercle auquel il appartient, on a la proportion

$$A : cerc.\, R :: a : circ.\, R.$$

En multipliant les deux termes du second rapport par $\frac{1}{2}$ R, il viendra

$$A : cerc.\, R :: a \times \tfrac{1}{2} R : circ.\, R \times \tfrac{1}{2} R.$$

Or, les conséquents de cette dernière proportion sont égaux (**380**) : donc il en doit être de même des antécédents; donc

$$A = a \times \tfrac{1}{2} R,$$

ce qui démontre notre théorème.

384. On voit ainsi que, pour évaluer l'aire d'un secteur, lorsqu'on donne seulement le rayon et le nombre de grades et de parties de grade de l'arc qui lui sert de base, on doit commencer par calculer la longueur de cet arc. Supposons, par exemple, que l'on demande l'aire d'un secteur dont l'arc est de $15^G\ 75'$ et le rayon $12^m{,}7$. On observera que, dans un même cer-

cle, les longueurs des arcs sont proportionnelles aux nombres de grades et de parties de grade qu'ils contiennent; or la longueur de l'arc de 200^G est ici $12^m,7 \times \frac{22}{7}$ (**334**), en adoptant le rapport d'Archimède; donc on aura la longueur de l'arc de $15^G 75'$ par la proportion

$$200^G : 15^G75' :: 12^m,7 \times \tfrac{22}{7} : x^m;$$

d'où l'on tire $x = 22^m,00275$, en substituant au rapport des nombres concrets 200^G et $15^G 75'$, le rapport équivalent $200 : 15,75$. Ainsi l'aire de notre secteur est égale à

$$\left(22,00275 \times \tfrac{12,7}{2}\right)^{m.q} = 139^{m.q},7174625.$$

385. *On appelle* SINUS *d'un arc la perpendiculaire abaissée de l'une de ses extrémités sur le rayon qui passe par l'autre :* ainsi AP est le sinus de l'arc AMB : d'où l'on voit que ce sinus est la moitié de la corde AA' qui sous-tend l'arc AMA' double de AMB.

Théorème XIV.

386. *L'aire d'un segment de cercle* AMBA (on appelle ainsi la portion d'un cercle comprise entre un arc et sa corde) *a pour mesure la moitié de son rayon multipliée par l'excès de cet arc sur son sinus.*

En effet, l'aire du segment AMB est évidemment la différence des aires du secteur AMBO et du triangle ABO. Mais le secteur a pour mesure $\frac{BO}{2}.AMB$; l'aire du triangle est égale à $\frac{BO}{2}.AP$: donc le segment aura pour mesure la différence de ces deux produits, c'est-à-dire, en mettant $\frac{BO}{2}$ en facteur commun, $\frac{BO}{2}.(AMB - AP)$, ce que nous voulions démontrer.

Or, quand on connaîtra un arc et son rayon, on devra pouvoir calculer le segment de cercle correspondant : car le sinus d'un arc donné est nécessairement

déterminé. Cependant le calcul du sinus d'un arc donné est un problème que la géométrie élémentaire ne peut résoudre que dans un petit nombre de cas très-particuliers.

Exemple. *Calculer l'aire d'un segment dont l'arc est de* 60°, *dans le cercle dont le rayon est* R.

Si l'on remarque que l'arc de 60° est le sixième de la circonférence, on conclura du n° **334** que sa longueur est égale à $\frac{\pi R}{3}$. D'un autre côté, le sinus de cet arc est la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit (**385**), puisque ce côté sous-tend un arc de 120°; donc l'aire demandée a pour expression

$$\left(\frac{\pi R}{3} - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{R}{2} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}.$$

Problème I.

387. *Mesurer l'aire d'un polygone irrégulier quelconque.*

Il peut se présenter deux cas, selon que l'intérieur du polygone est accessible ou qu'il ne l'est pas.

Premier cas. 1° Si l'on peut parcourir le polygone dans tous les sens, on le partagera en triangles, en ayant soin de faire partir toutes les lignes de division du sommet d'un même angle si la chose est possible, et il ne s'agira plus alors que d'évaluer les aires de ces différents triangles. Pour abréger les opérations, on donnera, si cela se peut, la même base à deux triangles adjacents; car alors, dans l'addition de leurs aires, on mettra cette base en facteur commun, et l'on trouvera ainsi que l'aire du quadrilatère formé par ces deux triangles est égale à la base commune multipliée par la demi-somme de leurs hauteurs. De cette manière, on remplacera une multiplication par une addition. Ainsi, dans la figure 177, on prendra la diagonale AC pour base commune des triangles ABC et ADC, et, en abaissant sur cette base les perpendiculaires BB'

Fig. 177.

et DD′, on verra que, leurs aires respectives étant $AC.\frac{BB'}{2}$ et $AC.\frac{D'D}{2}$, celle du quadrilatère ABCD sera $AC.\frac{BB'+DD'}{2}$. En prenant de même AE pour base commune des deux triangles ADE et AFE, on trouvera que l'aire du quadrilatère ADEF a pour mesure $AE.\frac{DD''+FF'}{2}$; et, comme celle du triangle AGF a pour expression $AF.\frac{GG'}{2}$, on en conclura que la mesure de l'aire du polygone entier est

$$\tfrac{1}{2}\{AC.(BB'+DD')+AE.(DD''+FF')+AF.GG'\}.$$

Observons toutefois qu'il sera encore plus simple, et surtout plus exact, d'évaluer l'aire de chaque triangle en fonction immédiate de ses côtés (**372**), puisqu'on sera ainsi dispensé d'abaisser la hauteur de chacun.

2° On peut encore parvenir à évaluer l'aire d'un polygone quelconque en le décomposant en triangles et en trapèzes rectangles. Pour cela, on tirera, dans le sens de sa plus grande largeur, d'un angle à un autre du polygone, une droite AI, que l'on nomme *directrice;* puis des sommets B, C, D, K, on abaissera des perpendiculaires BB′, CC′, DD′, KK′, sur cette droite; et des points F et G, les perpendiculaires FF′ et GG′ sur DD′. Mesurant ensuite AB′, B′C′, C′D′, D′I, BB′, KK′, CC′, DF′, F′G′, G′D′, FF′ et GG′, on aura les éléments nécessaires à la détermination des aires de toutes les parties ABB′, BC′, CD′, DFF′, FG′, GD′ et AKI, dans lesquelles nous avons décomposé notre polygone. Supposons, par exemple, que l'on ait trouvé Fig. 178.

$AB' = 15^{m},8$; $B'C' = 12^{m},6$; $C'D' = 21^{m},4$; $D'I = 30^{m},2$
$BB' = 17,3$; $KK' = 18,1$; $CC' = 10,5$; $DF' = 10,8$
$F'G' = 16,4$; $G'D' = 11$; $FF' = 14,1$; $GG' = 8,6$.

Il en résultera d'abord que $AI = 80^{m}$, et que DD′

$= 38^{m},2$ (il sera bon, d'ailleurs, de mesurer directement ces deux dernières lignes pour se fournir des vérifications). On verra ainsi que

$$
\begin{aligned}
ABB' &= \tfrac{15,8}{2}.17,3 &&= 136,^{m.q}67\\
B'C' &= (17,3 + 10,5).\tfrac{12,6}{2} &&= 175,\ 14\\
C'D' &= (10,5 + 38,2).\tfrac{21,4}{2} &&= 521,\ 09\\
DFF' &= \tfrac{10,8}{2}.14,1 &&= 76,\ 14\\
FG' &= (14,1 + 8,6).\tfrac{16,4}{2} &&= 186,\ 14\\
G'I &= (8,6 + 30,2).\tfrac{11}{2} &&= 213,\ 40\\
AKI &= \tfrac{80}{2}.18,1. &&= 724,\ 00\\
& &&\overline{2032,\ 58}
\end{aligned}
$$

et que, par conséquent, l'aire du polygone est de $2032^{m.q},58$.

Deuxième cas. Si l'intérieur du polygone était inaccessible, comme le serait un bois fourré et impénétrable ou un étang, on circonscrirait un rectangle à ce polygone, en ayant soin, pour plus de simplicité, de diriger un de ses côtés suivant un de ceux du polygone, et de faire passer les trois autres par les sommets de trois angles de ce polygone. Au moyen de parallèles menées aux côtés de ce rectangle par les sommets des angles du polygone, on partagera l'intervalle compris entre son périmètre et celui du rectangle en triangles et en trapèzes rectangles (si quelque partie ne se prêtait pas à cette décomposition, on la diviserait en triangles par des diagonales), dont il sera facile d'évaluer les aires. Retranchant enfin la somme de ces aires de celle du rectangle, on obtiendra évidemment celle du polygone.

388. Si une ou plusieurs parties du périmètre de la surface plane à mesurer étaient courbes, on distinguerait encore deux cas suivant que l'on pourrait pénétrer dans l'intérieur de la figure ou qu'on ne le pourrait pas, et l'on opérerait dans chaque cas comme nous l'avons fait au n° **387**. La difficulté serait ainsi
Fig. 179. réduite à mesurer les espaces B'BCQDFF', GII' et

PON, ou CB″B, CQD, DFF″, GII″, ONN′, ORP′P. Occupons nous donc d'évaluer ces différentes aires.

PROBLÈME II.

389. *Mesurer l'aire de la surface comprise entre une courbe* AMB, *une droite* A′B′, *et les perpendiculaires abaissées sur cette droite des deux extrémités de la courbe.* Fig. 180.

On partagera la droite A′B′ en un certain nombre de parties égales, et par tous les points de division C′, D′, F′, on élèvera des perpendiculaires C′C, D′D, F′F, à A′B′ (on se contentera de faire planter des jalons aux points où elles coupent la ligne AMB). Si ces perpendiculaires sont suffisamment rapprochées, les arcs AC, CD, DF, FB, différeront très-peu de leurs cordes, de sorte que l'on pourra, sans erreur sensible, regarder le *segment* A′AMBB′ comme partagé en trapèzes rectangles. Il sera donc facile d'évaluer ses différentes parties, et l'on trouvera que

$$A'C = \frac{AA' + CC'}{2} \cdot A'C', \quad C'D = \frac{CC' + DD'}{2} \cdot A'C',$$

$$D'F = \frac{DD' + FF'}{2} \cdot A'C', \quad F'B = \frac{FF' + BB'}{2} \cdot A'C',$$

puisque tous ces trapèzes ont des hauteurs égales à A′C′. En additionnant tous ces produits, on pourra mettre A′C′ en facteur commun, et, en observant que la moitié de chacune des perpendiculaires intermédiaires CC′, DD′, FF′, est répétée deux fois, on trouvera en définitive :

$$A'AMBB' = \left\{ \frac{AA' + BB'}{2} + CC' + DD' + FF' \right\} . A'C',$$

résultat qui nous apprend que, *pour évaluer l'aire d'un segment curviligne quelconque, il faut partager sa base en un nombre de parties égales d'autant plus grand que l'on voudra plus d'exactitude; élever aux différents points de division des perpendi-*

culaires à cette base, puis ajouter à la demi-somme des deux perpendiculaires extrêmes toutes les perpendiculaires intermédiaires, et multiplier le résultat par la distance de deux points de division consécutifs.

Cette règle comprend évidemment, comme cas particulier, celui où les deux extrémités de la courbe, ou l'une d'elles seulement, se trouveraient sur la base du segment ; car alors il suffirait de regarder comme nulles les deux perpendiculaires extrêmes, ou seulement l'une d'elles.

Problème III.

390. *Évaluer l'aire de la surface comprise entre deux lignes courbes et deux lignes parallèles, ou enveloppée par une ligne courbe.*

1° Si l'on peut pénétrer dans l'intérieur de l'aire à
Fig. 181. mesurer, on tracera une perpendiculaire af aux deux parallèles AA' et FF' ; on la divisera en un certain nombre de parties égales, et, par tous les points de division, on mènera des parallèles à AA'. De cette manière, l'aire AF' sera partagée en un certain nombre de figures qu'on pourra regarder comme des trapèzes ayant tous pour hauteur commune la distance ab de deux points de division consécutifs ; et, en évaluant les aires de ces différents trapèzes, on trouvera que leur somme, c'est-à-dire celle de AF', a pour mesure *le produit que l'on obtient en multipliant par la distance de deux parallèles consécutives la demi-somme des deux parallèles extrêmes augmentée de toutes les autres.*

Telle est la règle que l'on suit pour mesurer l'aire de la section horizontale faite dans la carène d'un vaisseau, ainsi que celle de la section verticale déterminée dans cette même carène par un plan parallèle au plan de symétrie du navire.

Si la surface à mesurer est terminée de toutes parts par une ligne courbe, on la partagera encore en tra-

pèzes, en traçant dans son intérieur une ou plusieurs directrices : ainsi, dans le cas de la figure 182, on tirera une première directrice AB aux extrémités de laquelle on élèvera deux perpendiculaires AA′ et BB′; on mènera ensuite une seconde directrice CD perpendiculaire à BB′, et en D une parallèle DD′ à BB′. L'aire proposée se trouverait ainsi partagée en quatre parties AMA′, A′AB′B, BB′DD′ et DND′, qu'on sait évaluer. Fig. 182.

Remarquons que si AB et CD avaient une commune mesure qui ne fût pas trop petite, on pourrait calculer directement l'aire A′ABD′DB′A′, en portant cette commune mesure sur AB et sur CD, et élevant des perpendiculaires à ces lignes par les points de division (390).

2° Si l'on ne peut pas pénétrer dans l'intérieur de la surface à mesurer, on la renfermera dans un rectangle PQRS, dont deux côtés au moins soient tangents à la courbe BMB′N; puis on partagera les deux côtés PQ et RS en un même nombre de parties égales, et par les points de division l'on mènera des parallèles aux deux tangentes PS et QR. Il n'y aura plus qu'à mesurer les parties de ces parallèles comprises entre leur point de départ et l'arc de courbe correspondant, et l'on en déduira facilement les longueurs des portions qui sont comprises dans la courbe, et par suite l'aire demandée.

CHAPITRE II.

COMPARAISON DES AIRES.

Théorème I.

391. *Le carré* BO *construit sur l'hypoténuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC *est équivalent à la* Fig. 183.

somme des carrés AD *et* AF *construits sur les deux autres côtés de ce triangle.*

Abaissons du sommet A de l'angle droit la perpendiculaire AI sur l'hypoténuse, et prolongeons-la jusqu'au côté opposé du carré BO : nous partagerons ainsi ce carré en deux rectangles BL et CL, que je dis être équivalents aux carrés correspondants AF et AD. Pour le démontrer, je joins AK et FC, et je forme ainsi les deux triangles FBC et ABK, qui sont les moitiés respectives de AF et de BL; car le triangle FBC, par exemple, a la même base FB et la même hauteur AB que le carré AF. Or, ces deux triangles sont égaux : en effet, l'angle FBC, composé de l'angle ABC et du droit FBA, est égal à l'angle ABK, composé du même angle ABC et du droit CBK. De plus, les deux côtés FB et BC, qui comprennent l'angle FBC, sont égaux chacun à chacun aux côtés AB et BK qui comprennent l'angle ABK : donc les triangles FBC et ABK sont égaux, c'est-à-dire que la moitié du carré AF est égale à celle du rectangle BL; donc ce carré et ce rectangle sont équivalents. On prouverait de la même manière que le carré AD et le rectangle CL sont aussi équivalents : donc le carré BO, somme des deux rectangles BL et CL, est aussi la somme des deux carrés AF et AD.

392. Corollaire i. Les deux rectangles BL, CL, et le carré BO, ayant même hauteur IL, sont proportionnels à leurs bases (**360**) : ainsi l'on aura la suite de rapports égaux :

BL ou AF : BI :: CL ou AD : IC :: BO : BC,

c'est-à-dire que *les carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle sont proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse.*

393. Corollaire ii. *Les carrés faits sur les cordes qui partent des extrémités d'un même diamètre sont proportionnels aux projections de ces cordes sur ce diamètre :* car le rapport du carré de chaque corde

AB à sa projection BI sur le diamètre BC est égal (**392**) au rapport du carré de ce diamètre à ce même diamètre, et ainsi ce rapport est constant.

394. SCHOLIE. On aurait pu déduire le théorème qui précède et ses deux corollaires de celui du n° **233**, 4° et 5°, et du corollaire III (**237**) : car l'aire du carré construit sur une droite ayant pour mesure le carré du nombre abstrait qui exprime la longueur de cette droite (**364**), on voit que dire, par exemple, que le carré de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés de ce triangle, revient à cette proposition : Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, etc.

En général, on pourra substituer aux expressions carré de la longueur d'une ligne et produit des longueurs de deux lignes les expressions respectives carré construit sur cette ligne et rectangle construit sur ces deux lignes : ainsi, par exemple, ce théorème d'algèbre, que *le carré de la somme ou de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres augmentée ou diminuée de leur double produit*, revient à ce théorème de géométrie : *Le carré construit sur la somme ou la différence de deux droites est équivalent à la somme des carrés construits sur ces deux droites augmentée ou diminuée du double du rectangle qui aurait l'une d'elles pour base et l'autre pour hauteur* (¹).

(¹) 1° Sur la droite AC, somme des deux lignes données AB et BC, construisez le carré ACDF; prenez AG = AB, et par les points B et G menez les droites BL et GI parallèles à AF et à AC. De cette manière le carré AD sera la somme des quatre figures AK, DK, FK et CK. La première est le carré construit sur AB; la seconde est un carré dont le côté est égal à BC : car la figure KD a ses quatre angles droits, le côté KI = BC; LK, qui est égal à FG, différence de AF et de AG, est ainsi égal à BC, différence des lignes AC et AB égales à celles-ci; enfin Fig. 184.

Théorème II.

Fig. 187. **395.** *Les aires de deux triangles* ABC, ADF, *qui ont un angle commun* A, *sont proportionnelles aux produits des côtés qui comprennent dans chacun l'angle commun*, c'est-à-dire qu'on aura

$$ABC : ADF :: AB.AC : AD.AF.$$

Joignons, en effet, DC : les deux triangles ABC et

---

les dimensions des rectangles FK et CK sont évidemment AB et BC.

Fig. 185. 2° Sur AB, la plus grande des deux lignes données AB et BC, construisons le carré AD ; prenons AG égal à la différence AC de ces deux lignes, et menons par les points C et G les parallèles CM et GK à AF et à AB. Enfin construisons sur FG le carré GL. La figure totale ABDLIG est la somme des carrés construits sur AB et sur BC : car FG, différence des lignes AF et AG ou AB et AC, est ainsi égale à BC. Or, si l'on retranche de cette figure les deux rectangles BM et IM qui ont pour dimensions AB et BC, puisque $IK = IG + GK = BC + AC = AB$, il restera le carré AK construit sur la différence des deux lignes AB et BC.

On a donc $(AB \pm BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \pm 2 AB.BC$, le signe supérieur se rapportant à la figure 184 et l'inférieur à la figure 185.

On peut encore démontrer de la manière suivante ce théo-
Fig. 186. rème : *Le rectangle* AG, *qui a pour base la somme et pour hauteur la différence des deux lignes* AB *et* BC, *est équivalent à la différence des carrés construits sur ces deux lignes*, ce qui revient à dire que *la différence des carrés de deux nombres est égale à la somme de ces nombres multipliée par leur différence.*

En effet, construisez sur la plus grande des deux droites le carré AI ; puis, ayant pris $BD = BC$, menez DML parallèle à AK. Il est clair que MI est le carré construit sur BC : car, comme AF est, par hypothèse, la différence des deux droites AB et BC, et que AK est égal à AB, il faut nécessairement que $KF = BC$; or la différence des deux carrés AI et MI, construits respectivement sur AB et BC, est la figure ABNMLK équivalente au rectangle AG : car ces deux figures ont la partie commune ABNF, et les deux parties restantes MK et NC sont deux rectangles qui ont leurs bases et leurs hauteurs égales. Donc $(AB + BC).(AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

ADC, qui ont leurs bases AB et AD en ligne droite et leurs sommets au point C, ont par conséquent même hauteur, et sont ainsi entre eux comme leurs bases AB et AD (**371**) : donc

ABC : ADC :: AB : AD.......... (1).

De même, les triangles ADC et ADF donneront la proportion

ADC : ADF :: AC : AF.......... (2).

Multipliant ces deux proportions par ordre et supprimant le facteur ADC commun aux deux termes du premier rapport de la proportion-produit, il viendra

ABC : ADF :: AB . AC : AD . AF,

ce qu'il fallait démontrer.

396. Scholie. Pour que les triangles ABC et ADF soient équivalents, il faut que les deux termes du second rapport soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait la proportion

AB : AD :: AF : AC,

ou, ce qui revient au même, que la ligne BF soit parallèle à DC (**219**).

Théorème III.

397. *Les aires de deux triangles semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues.*

Abaissons des sommets homologues A et A′ des perpendiculaires AI et A′I′ sur les côtés opposés à ces angles. Les triangles rectangles ABI et A′B′I′ sont semblables : car les angles B et B′ sont supposés égaux (**249**); leurs côtés homologues sont donc proportionnels, et l'on a Fig. 103.

AI : A′I′ :: AB : A′B′.

Mais la similitude des triangles proposés donne aussi

BC : B′C′ :: AB : A′B′.

Multipliant ces deux proportions par ordre et divisant par 2 les deux termes du premier rapport de la proportion-produit, il viendra

$$\frac{1}{2}\text{BC}.\text{AI} : \frac{1}{2}\text{B}'\text{C}'.\text{A}'\text{I}' :: \overline{\text{AB}}^2 : \overline{\text{A}'\text{B}'}^2,$$

ce qui démontre notre théorème (**370**).

Observons que nous avons bien exprimé que les deux triangles ABC et A′B′C′ sont semblables; car nous avons écrit qu'ils avaient un angle égal compris entre côtés proportionnels (**352**).

Théorème IV.

398. *Les aires des polygones semblables sont proportionnelles aux carrés des côtés homologues de ces polygones.*

Nous pourrons partager les deux polygones dont il s'agit en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés (**254**), puis former autant de proportions, en exprimant que chacun des triangles du premier polygone est à celui qui lui correspond dans le second, comme le carré d'un de ses côtés est au carré du côté homologue de l'autre triangle (**397**) : ainsi

Fig. 117.

$$\text{DBC} : \text{D}'\text{B}'\text{C}' :: \overline{\text{BC}}^2 : \overline{\text{B}'\text{C}'}^2,$$
$$\text{ABD} : \text{A}'\text{B}'\text{D}' :: \overline{\text{AD}}^2 : \overline{\text{A}'\text{D}'}^2,$$
$$\text{EAD} : \text{E}'\text{A}'\text{D}' :: \overline{\text{EA}}^2 : \overline{\text{E}'\text{A}'}^2,$$
$$\text{EAF} : \text{E}'\text{A}'\text{F}' :: \overline{\text{AF}}^2 : \overline{\text{A}'\text{F}'}^2,$$
$$\text{GAF} : \text{G}'\text{A}'\text{F}' :: \overline{\text{AF}}^2 : \overline{\text{A}'\text{F}'}^2;$$

Mais, les polygones étant semblables, leurs côtés et leurs diagonales homologues (**263**), et partant les carrés de ces côtés et de ces diagonales, sont proportionnels; donc les seconds rapports de toutes nos proportions sont égaux; car ils sont formés de carrés de côtés ou de diagonales homologues des deux polygones; les premiers rapports sont donc aussi égaux; donc on aura la suite de rapports égaux

$$\text{DBC} : \text{D}'\text{B}'\text{C}' :: \text{ABD} : \text{A}'\text{B}'\text{D}' :: \text{EAD} : \text{E}'\text{A}'\text{D}' :: \text{EAF} : \text{E}'\text{A}'\text{F}' :: \text{GAF} : \text{G}'\text{A}'\text{F}',$$

dont les antécédents sont les triangles du premier polygone, et dont les conséquents sont les triangles correspondants du second; donc la somme de tous ces antécédents, c'est-à-dire l'aire du premier polygone ABCDEFG, est à la somme de tous ces conséquents, c'est-à-dire à l'aire du second A'B'C'D'E'F'G', comme un quelconque DBC des triangles du premier est au triangle semblable D'B'C' du second, ou comme le carré de l'un quelconque des côtés BC du premier est au carré du côté homologue B'C' du second.

Théorème V.

399. *Les aires des polygones réguliers semblables sont proportionnelles aux carrés des rayons des cercles qui leur sont inscrits ou circonscrits.*

En effet, les aires de ces polygones sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues (**398**); mais ces côtés sont proportionnels aux rayons des cercles incrits ou circonscrits (**326**, 2°), et par conséquent les carrés de ces côtés sont proportionnels aux carrés de ces rayons; donc aussi les aires des polygones réguliers semblables, etc.

Théorème VI.

400. *Les aires des cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

Désignons, en effet, par R et par R' les longueurs des rayons de deux cercles. Leurs aires, étant représentées par $\pi . R^2$ et par $\pi . R'^2$ (**381**), seront entre elles dans le rapport de ces deux nombres, et par conséquent dans celui de R^2 à R'^2.

401. Corollaire i. *Si l'on décrit trois demi-circonférences sur les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC, *l'aire de ce triangle sera égale à la somme de celles des deux* lunules AMBN et APCQ. Fig. 188.

En effet, de la suite de rapports égaux

$$cerc. AB : \overline{AB}^2 :: cerc. AC : \overline{AC}^2 :: cerc. CB : \overline{CB}^2,$$

on tire

$$cerc.\,AB + cerc.\,AC : \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 :: cerc.\,CB : \overline{CB}^2,$$

or, les conséquents étant égaux, les antécédents le seront aussi, c'est-à-dire que le cercle décrit sur CB est la somme des deux autres cercles décrits sur AB et sur AC; donc le demi-cercle BMAPC est équivalent à la somme des deux autres BNA et AQC. Mais, en retranchant d'une part les deux segments AMB et APC, il restera le triangle ABC; et en retranchant de l'autre part les mêmes segments, il reste les deux lunules : donc, etc.

402. Corollaire II. *Les aires de deux secteurs semblables,* c'est-à-dire qui correspondent à des angles au centre égaux, *sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

Soient, en effet, S et S′ les aires de ces deux secteurs; a et a' les arcs qui leur servent de base; et R et R′ les rayons des cercles dont ils font partie. On aura, d'après le n° **383** :

$$S : S' :: a.R : a'.R'.$$

Mais, puisque les secteurs sont semblables, leurs arcs le sont aussi (**353**); donc on aura :

$$a : a' :: R : R'.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et simplifiant, il viendra :

$$S : S' :: R^2 : R'^2.$$

403. Corollaire III. *Les aires de deux segments*
Fig. 159. *semblables,* c'est-à-dire qui correspondent à des angles au centre égaux, BAC *et* B′A′C′, *sont proportionnelles aux carrés des rayons des cercles dont ils font partie.*

En effet, les deux secteurs OACB et O′A′C′B′ sont semblables; donc on a (**402**) :

$$OACB : O'A'C'B' :: \overline{OA}^2 : \overline{O'A'}^2.$$

Mais les triangles AOB et A′O′B′ sont aussi semblables (**253**) : donc (**397**)

$$AOB : A'O'B' :: \overline{OA}^2 : \overline{O'A'}^2;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$OACB : O'A'C'B' :: AOB : A'O'B';$$

d'où, *dividendo*,

$$OACB - AOB : O'A'C'B' - A'O'B' :: OACB : O'A'C'B',$$

ou $$:: \overline{OA}^2 : \overline{O'A'}^2,$$

c'est-à-dire,

$$ACB : A'C'B' :: \overline{OA}^2 : \overline{O'A'}^2;$$

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LES AIRES.

Problème I.

404. *Transformer un polygone donné* ABCDF *en un triangle.* Fig. 189.

Il est clair que si nous savions transformer un polygone donné en un autre qui eût un côté de moins, nous pourrions regarder le problème proposé comme résolu. Or, si nous joignons CF, le polygone ABCF aura un côté de moins que ABCDF; mais aussi il sera plus petit que lui du triangle CDF. Il s'agit donc d'ajouter au polygone ABCF une surface égale à celle de ce triangle, sans cependant augmenter le nombre de ses côtés; or, on y parviendra en construisant sur CF un triangle équivalent à CDF, dont le sommet soit sur AF. Il suffira, pour cela, de mener par le point D une parallèle DG à CF, et de joindre CG : car il est évident que le triangle CGF aura ainsi même base et même hauteur que DCF, et lui sera par conséquent équivalent (370). Le polygone proposé ABCDF sera donc transformé en un polygone ABCG ayant un côté de moins. Pour transformer actuellement ce quadrilatère en un triangle, on joindra semblablement BG; par le point C on mènera la parallèle CI à BG,

on tirera la droite BI, et le triangle ABI résoudra le problème.

Remarquons que notre triangle a un côté AB et un angle A communs avec le polygone donné.

Remarquons encore que notre construction convient aussi bien à un polygone concave qu'à un polygone
Fig. 190. convexe. L'hexagone ABCDEF a été transformé successivement en un pentagone ABCDG, en un quadrilatère ICDG, et enfin en un triangle ICK.

Problème II.

405. *Transformer un triangle donné en un carré.*

Cherchez une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur du triangle et vous aurez le côté demandé; car le carré de cette moyenne proportionnelle sera égal au produit de la base du triangle par la moitié de sa hauteur, c'est-à-dire à son aire.
Fig. 191. Ainsi, on prendra le milieu F de la hauteur AD; on prolongera FD d'une quantité DG = CB; et, en décrivant une demi-circonférence sur FG, on déterminera la moyenne proportionnelle DI entre DF et DG.

406. Corollaire. On pourra ainsi transformer un polygone quelconque en un carré, puisque nous venons de donner le moyen de changer tout polygone en un triangle.

Problème III.

407. *Transformer un triangle* ABC *en un autre qui ait pour sommet un point donné* O, *et dont la base soit dirigée suivant* BC *à partir de* B *ou de* C.

Il peut se présenter deux cas, selon que le point O se trouve ou ne se trouve pas sur l'un des côtés AB et AC.

Fig. 192. *Premier cas.* Supposons le point O sur le côté AB. Si nous joignons OC, nous formerons un triangle BOC, dont le sommet sera en O, et qui aura BC pour base. Mais il est trop petit de AOC. Pour l'augmenter

de cette quantité, sans cependant changer le nombre de ses côtés, nous mènerons par le point A une parallèle AF à OC, et nous joindrons OF (370). Il est facile de voir que le triangle BOF résoudra le problème.

Deuxième cas. Supposons que le point O ne soit ni sur l'un ni sur l'autre des deux côtés AB et AC. Nous ramènerons ce second cas au premier en transformant le triangle ABC en un autre qui ait même base et même hauteur que lui, et dont un des côtés soit dirigé suivant BO; il suffira pour cela de mener par le point A une parallèle à BC, et de joindre le point A', où elle coupe BO, avec le point C. Le triangle BOF résout le problème. Fig. 193.

Problème IV.

408. *Par un point* O *donné sur le périmètre d'un polygone* ABCDEF, *mener une droite qui en retranche une partie équivalente à un polygone donné* LMNQ. Fig. 194.

On transformera d'abord le polygone LMNQ en un triangle équivalent LQR (404), puis celui-ci en un autre LST, dont la hauteur soit égale à la perpendiculaire abaissée du point donné O sur le côté adjacent AB. Cela fait, on prendra sur ce côté AB une quantité AG=LT, et l'on joindra OG. Si le point G ne se trouve pas au delà de B, le problème est résolu, puisque le triangle OAG est équivalent à LST, et partant au polygone donné LMNQ. S'il n'en est pas ainsi, on joindra OB; et, comme il ne s'agira plus que de retrancher du polygone OBCDEF une portion équivalente au triangle OBG, on construira sur OB un triangle équivalent à OBG, et dont le sommet soit sur la droite indéfinie BC. Pour cela, on mènera GH parallèle à OB, et l'on joindra OH. Si le point H ne se trouve pas au delà de C, le problème est résolu : car le quadrilatère OABH est équivalent au triangle OAG. Si le point H est situé au delà de C, les mêmes consi-

dérations conduiront à joindre OC, à mener HI parallèle à OC, et à tirer OI. Si le point I ne tombe pas au delà de D, le problème est résolu : car le triangle OCI étant équivalent à OCH, le pentagone OABCI est équivalent au quadrilatère OABH, et partant au triangle OAG. Si, comme dans la figure, le point I est situé au delà de D, on tirera OD, on mènera par le point I la parallèle IK à OD, et l'on joindra OK. Le point K se trouvant entre D et E, la droite OK résout le problème.

Remarquons que le problème *pourrait* être impossible si le polygone proposé était concave.

Problème V.

409. *Construire un carré qui soit équivalent à la somme de plusieurs carrés donnés.*

Pour additionner les deux premiers carrés, construi-
Fig. 195. sez un triangle rectangle OAB dont les deux côtés de l'angle droit soient égaux aux côtés a et b de ces carrés, et il est clair que le carré construit sur son hypoténuse AB sera la somme de ces deux-là. Pour additionner à cette somme le troisième carré, on élèvera au point B une perpendiculaire $BC = c$, on joindra AC, et le carré fait sur AC sera la somme des trois premiers carrés, et ainsi de suite.

Problème VI.

410. *Construire un carré équivalent à la différence de deux carrés donnés.*

Fig. 196. Construisez un triangle rectangle dont l'hypoténuse AO et un des côtés OB de l'angle droit soient égaux aux côtés a et b de ces deux carrés, et le carré construit sur le troisième côté AB de ce triangle résoudra le problème.

Problème VII.

411. *Étant donnés deux polygones semblables, construire un troisième polygone qui leur soit sem-*

blable, et dont l'aire soit la somme ou la différence des aires de ces deux polygones.

On cherchera le côté d'un carré qui soit égal à la somme ou à la différence des carrés faits sur deux côtés homologues des polygones donnés, et l'on aura le côté qui, dans le polygone demandé, doit être homologue à ces deux côtés-là, de sorte que le problème sera alors ramené à celui du n° **282**.

Problème VIII.

412. *Construire un carré qui soit à un carré donné a^2 comme une ligne donnée m est à une autre ligne donnée n*, c'est-à-dire qui soit tel qu'en représentant son côté par x, on ait la proportion

$$x^2 : a^2 :: m : n.$$

Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle étant proportionnels à leurs projections sur l'hypoténuse (**392**), je prends sur une droite indéfinie deux parties OM et ON respectivement Fig. 197.
égales à m et à n, je décris sur MN comme diamètre une demi-circonférence, j'élève au point O la perpendiculaire OP sur MN, et je joins PM et PN, ce qui forme le triangle rectangle PMN. Si donc PN était égale au côté a du carré donné, PM serait le côté du carré demandé. S'il n'en est pas ainsi, je prends sur PN, prolongé s'il est nécessaire, la partie $\text{PA} = a$ (remarquez que dans la proportion demandée $x^2 : a^2 :: m : n$, le carré a^2 doit correspondre à la ligne n), je mène AX parallèle à MN, et je dis que la droite PX résout le problème. En effet, on a évidemment :

$$\text{PX} : \text{PA ou } a :: \text{PM} : \text{PN},$$

et par conséquent

$$\overline{\text{PX}}^2 : a^2 :: \overline{\text{PM}}^2 : \overline{\text{PN}}^2.$$

Mais le triangle rectangle PMN donne :

$$\overline{\text{PM}}^2 : \overline{\text{PN}}^2 :: \text{MO ou } m : \text{NO ou } n:$$

donc, à cause du rapport commun,

$$\overline{PX}^2 : a^2 :: m : n.$$

413. Si l'on demandait un carré qui fût une certaine fraction, par exemple les $\frac{3}{5}$ du carré a^2, il est évident que ce problème étant un cas particulier du précédent, pourrait se résoudre de la même manière, en ayant soin seulement de prendre OM et ON égales respectivement à trois fois et à cinq fois une grandeur arbitraire; mais on arrivera plus directement au but de la manière suivante.

Fig. 198. On décrira une demi-circonférence sur OA, côté du carré donné; puis, ayant partagé ce côté en cinq parties égales, on élèvera une perpendiculaire BX au troisième point B de division; on joindra OX, et cette droite sera le côté du carré demandé. En effet, le carré d'une corde est au carré du diamètre comme la projection de cette corde est au diamètre (**237** et **393**) : donc

$$\overline{OX}^2 : \overline{OA}^2 :: OB : OA.$$

Mais OB est les $\frac{3}{5}$ de OA : donc aussi le carré construit sur OX est les $\frac{3}{5}$ de celui fait sur OA.

414. Si le carré demandé devait être, par exemple,
Fig. 199. les $\frac{5}{3}$ du carré a^2, on diviserait le côté OA de ce carré en trois parties égales; mais on le prolongerait d'une quantité AB égale à deux de ces parties, de sorte que OB étant ainsi les $\frac{5}{3}$ de OA $= a$, le carré fait sur OB sera les $\frac{25}{9}$ du carré a^2. Si donc on cherche, comme précédemment, le côté OX d'un carré qui soit les $\frac{3}{5}$ de celui construit sur OB, on aura résolu le problème : car les $\frac{3}{5}$ des $\frac{25}{9}$ du carré a^2 sont les $\frac{25 \cdot 3}{9 \cdot 5}$ ou les $\frac{5}{3}$ de carré.

Problème IX.

415. *Trouver une droite x qui soit à une droite donnée a, comme un carré donné m^2 est à un autre carré donné n^2*, c'est-à-dire telle que l'on ait la proportion

$$x : a :: m^2 : n^2.$$

En s'appuyant toujours sur ce principe, que les carrés des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse, on tracera deux droites à angles droits sur lesquelles on prendra des distances OM et ON respectivement égales aux côtés des carrés donnés m^2 et n^2; puis, joignant MN et abaissant du sommet O la perpendiculaire OP sur MN, on aura la proportion Fig. 200.

$$\overline{OM}^2 \text{ ou } m^2 : \overline{ON}^2 \text{ ou } n^2 :: MP : NP.$$

Si donc NP était égale à a, MP résoudrait le problème. S'il n'en est pas ainsi, on prendra sur PN une distance $PA = a$ (remarquez que, dans la proportion demandée, a doit correspondre à n^2); puis on mènera AA′ parallèle à OP jusqu'à la rencontre de ON, et ensuite A′X parallèle à MN. Il est facile de voir que QX sera la ligne demandée.

416. Scholie. Si l'on demandait seulement le rapport des deux carrés m^2 et n^2, il n'y aurait qu'à chercher une troisième proportionnelle x aux deux côtés m et n de ces carrés, et le rapport de m à x serait celui même de m^2 à n^2, comme il est facile de le voir.

Problème X.

417. *Construire un polygone semblable au polygone* ABCDF, *et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans le rapport de deux droites données m et n.* Fig. 201.

Puisque le polygone demandé doit être semblable à ABCDF, leurs aires seront proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues; mais comme, d'une autre part, ces aires doivent aussi être proportionnelles aux droites m et n, on voit que les carrés de ces côtés homologues seront entre eux comme m est à n : ainsi, pour avoir le côté qui, dans le polygone demandé, sera homologue à AB, il faudra chercher le côté d'un carré qui soit au carré fait sur AB comme m est à n. On

pourrait résoudre ce problème par la construction donnée au n° 412 ; mais il sera plus simple d'imiter celle donnée au n° 413 ou 414. En conséquence, on cherchera une quatrième proportionnelle AG aux trois lignes n, m et AB; puis, ayant décrit une demi-circonférence sur la plus grande des deux lignes AG et AB, on élèvera à l'extrémité de la plus petite une perpendiculaire, et l'on tirera la corde AI : cette corde sera le côté du carré demandé. On la rabattra donc en AB′ sur AB, et il ne s'agira plus que de construire sur AB′ un polygone semblable à ABCDF. Pour cela, on partagera le polygone ABCDF en triangles par des diagonales issues du sommet A, si la chose est possible; puis on mènera successivement B′C′, parallèle à BC; C′D′, parallèle à CD; D′F′, parallèle à DF; et le polygone AB′C′D′F′ résoudra le problème : car d'abord il est semblable à ABCDF (254), ensuite leurs aires sont entre elles comme $\overline{AB'}^2$ est à $\overline{AB}^2$, par conséquent comme AG : AB, ou comme AM $= m$: AN $= n$.

Problème XI.

Fig. 202. 418. *Un polygone* ABCDF *étant donné, construire quatre polygones qui lui soient semblables, dont les aires soient proportionnelles à quatre lignes données m, n, p, q, et telles que leur somme soit égale à celle du polygone* ABCDF.

Partagez l'un quelconque AB des côtés du polygone en parties AM, MN, NP, PB, proportionnelles aux quatre droites données m, n, p, q; reportez les parties intermédiaires MN et NP de A en N′ et en P′; puis, ayant décrit une demi-circonférence sur AB, élevez aux points M, N′, P′ et P des perpendiculaires MB′, N′B″, P′B‴ et PB^{IV} sur AB, et joignez AB′, AB″, AB‴, PB^{IV}. Ces cordes seront les côtés qui, dans les polygones demandés, seront homologues à AB : car les carrés de ces cordes sont proportionnels à leurs projections AM, AN′, AP′ et BP, et par conséquent aux

lignes m, n, p, q ; et, la somme de ces projections étant AB, la somme de ces carrés sera $\overline{AB}^2$: donc aussi les aires des quatre polygones seront proportionnelles aux lignes m, n, p, q, et leur somme sera celle même du polygone ABCDF.

Problème XII.

419. *Transformer le polygone* ABCD *en un autre* Fig. 203.
qui soit semblable au polygone FGIKL.

Désignons, pour abréger, par P et Q les aires respectives de nos deux polygones, et par x le côté homologue à FG dans le polygone inconnu. Puisque ce polygone doit être semblable à FGIKL, on aura :

$$Q : P :: \overline{FG}^2 : x^2.$$

Cela posé, on transformera les polygones Q et P chacun en un carré, et, en désignant par q et par p les côtés de ces carrés, la proportion précédente deviendra :

$$q^2 : p^2 :: \overline{FG}^2 : x^2,$$

de laquelle on tire (Arith., n° **235**).

$$q : p :: FG : x.$$

Ainsi, en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes connues q, p et FG, on aura le côté qui, dans le polygone demandé, doit être homologue à FG. Il sera facile ensuite de construire ce polygone.

420. Corollaire. Le problème que nous venons de résoudre donne le moyen de transformer un polygone irrégulier quelconque en un des polygones réguliers que nous savons inscrire dans la circonférence : car il suffira évidemment de construire d'abord un polygone régulier qui ait le nombre de côtés demandé; puis de transformer le polygone irrégulier en un autre qui soit semblable au nouveau polygone.

Problème XIII.

421. *Partager le trapèze* ABCD *en deux parties* Fig. 204.

proportionnelles à deux droites données p et q par une parallèle à ses bases.

Supposons que EF soit la parallèle demandée, et que l'on ait ainsi

$$AF : EC :: p : q;$$

on tire de cette proportion

$$AC : AF :: p + q : p.$$

Cela posé, je prolonge les deux côtés AD et BC jusqu'à leur rencontre en O, et alors la similitude des deux triangles OAB et OEF donne la proportion

$$OAB : OEF :: \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2,$$

d'où

$$OAB : AF :: \overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 - \overline{EF}^2.$$

On aura de la même manière

$$OAB : AC :: \overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 - \overline{DC}^2.$$

Cette proportion et la précédente ayant les mêmes antécédents, il en résulte

$$AC : AF :: \overline{AB}^2 - \overline{DC}^2 : \overline{AB}^2 - \overline{EF}^2,$$

et par conséquent

$$p + q : p :: \overline{AB}^2 - \overline{DC}^2 : \overline{AB}^2 - \overline{EF}^2,$$

proportion dans laquelle il n'y a que EF d'inconnue.

Or, si l'on décrit une demi-circonférence sur AB comme diamètre, et que du point A, comme centre, avec DC et EF pour rayons, on trace les arcs qui coupent cette circonférence en G et en I, on aura $\overline{BG}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{DC}^2$ et $\overline{BI}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EF}^2$; mais si l'on projette les points G et I en K et en L sur le diamètre AB, la propriété du n° 393 nous donnera

$$\overline{BG}^2 : \overline{BI}^2 :: BK : BL;$$

donc

$$p + q : p :: BK : BL.$$

Ainsi BL est une quatrième proportionnelle aux lignes $p + q$, p et BK; on construira donc cette ligne, puis on élèvera au point L une perpendiculaire LI sur

AB, et il ne s'agira plus que de tirer une parallèle EF à AB qui soit égale à AI, ce qui est facile.

422. Scholie. Si l'on voulait partager le trapèze en parties équivalentes, par exemple, par des parallèles à ses bases, on observerait que AF, AF′, AF″... étant respectivement le $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$... de AC, il suffirait, pour résoudre le problème, de partager BK en cinq parties égales, d'élever des perpendiculaires à cette droite par les points de division, et de tirer des parallèles à AB qui soient égales aux cordes respectives AI, AI′, AI″..... Fig. 205.

Problème XIV.

423. *Construire un rectangle équivalent à un carré donné m^2, et tel que la somme ou la différence de ses deux côtés adjacents soit égale à une ligne donnée a.*

1° La droite m doit être moyenne proportionnelle entre les deux dimensions du rectangle demandé, et comme la somme de ces deux dimensions est a, on pourra regarder m comme la perpendiculaire abaissée d'un point d'une circonférence sur un diamètre et les deux côtés contigus du rectangle comme les segments de ce diamètre, qui sera ainsi égal à a. En conséquence, on décrira une demi-circonférence sur une droite $OA = a$, on élèvera au point O une perpendiculaire $OM = m$ sur le diamètre OA, et en menant par son extrémité M une parallèle MXX′ à OA; puis, abaissant du point X, où elle coupe la circonférence, une perpendiculaire BX sur ce diamètre, on déterminera deux segments OB et BA, qui seront les deux dimensions du rectangle demandé, car on a $BX^2 = OB.BA$. Fig. 206.

2° La droite m doit être moyenne proportionnelle entre les deux dimensions du rectangle demandé, et comme la différence de ces deux dimensions doit être a, on pourra regarder m et le plus grand des côtés de ce rectangle comme une tangente et une sécante is-

sues d'un même point, et le plus petit côté comme la partie supérieure de cette sécante, de sorte que la corde qu'elle laisse dans la circonférence est égale à a.
Fig. 207. En conséquence, à l'extrémité M d'une droite $OM = m$, on élèvera une perpendiculaire $MA = \frac{a}{2}$, du point A comme centre, et avec AM pour rayon on décrira une circonférence, et, en tirant par le centre A et le point O une sécante OAX, cette droite sera le plus grand côté du rectangle demandé, et la partie extérieure OX′ en sera le plus petit. En effet, on voit d'abord que la différence des deux droites OX et OX′ est $XX' = a$; ensuite que $\overline{OM}^2 = OX.OX'$ (229).

PROBLÈME XV.

Fig. 208. **424.** *Étant données trois droites* B′B″, BC *et* C′C″, *telles que la seconde coupe les deux autres, mener une droite* MN *parallèle à* BC, *de manière que l'aire du trapèze* BN *soit égale à celle d'un carré donné* m^2.

Je cherche une troisième proportionnelle aux deux lignes $\frac{BC}{2}$ et m, et je mène à BC une parallèle DK qui en soit distante d'une quantité égale à cette troisième proportionnelle. Il est clair que le triangle BDC est équivalent au carré m^2.

Cela posé, puisque le trapèze BN est supposé équivalent au triangle BDC, les deux triangles MDC et MNC sont nécessairement équivalents : donc DN est parallèle à MC; et, comme MN l'est déjà à BC, nous aurons cette suite de rapports égaux :

$$BC : MN :: AC : AN :: AM : AD :: MN : DK.$$

Ainsi l'on aura MN en prenant une moyenne proportionnelle entre BC et DK, et il ne s'agira plus que d'inscrire entre B′B″ et C′C″ une droite qui soit égale à cette moyenne proportionnelle et parallèle à BC.

425. PROBLÈMES A RÉSOUDRE. 1° *Inscrire dans*

un carré donné un carré dont le côté soit égal à une droite donnée m.

2° *Étant donnés un cercle et une droite indéfinie, mener par l'extrémité d'un diamètre perpendiculaire à cette droite une sécante telle que la partie comprise entre le cercle et la droite soit égale à une droite donnée m.*

3° *Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel qu'en le joignant à ses trois sommets les aires des trois triangles ainsi formés soient proportionnelles à trois droites données.*

4° *Trouver le lieu de tous les points d'un plan qui sont également éclairés par deux lumières, dont la position est connue et dont les intensités sont proportionnelles à deux droites données p et q, sachant d'ailleurs que les intensités d'une même lumière, à des distances différentes, sont réciproquement proportionnelles aux carrés de ces distances.*

5° *Par deux points donnés sur une circonférence mener deux cordes parallèles, de manière que le trapèze dont elles seront les bases soit équivalent à un carré donné.*

6° *Étant données deux circonférences concentriques et un diamètre commun, tirer dans la plus grande une corde qui fasse avec ce diamètre un angle donné et qui soit divisée par la plus petite circonférence en parties proportionnelles à des droites données.*

LIVRE VI.

DES SURFACES PLANES INDÉFINIES.

CHAPITRE PREMIER.

DES PLANS ET DES LIGNES DROITES.

426. Nous avons vu qu'un plan est déterminé par la condition de passer par trois points qui ne sont pas en ligne droite, ou par deux droites qui se coupent; il l'est encore quand il doit passer par deux droites parallèles : ainsi

Théorème I.

Deux droites parallèles déterminent un plan.

En effet, on pourra toujours mener un plan par deux parallèles données, puisque, d'après la définition du n° **62**, ces deux droites sont dans un même plan. En second lieu, on ne pourra en mener qu'un, sans quoi, en prenant deux points sur l'une et un sur l'autre droite, on aurait deux plans distincts passant par ces trois points qui ne sont pas en ligne droite.

Fig. 209. **427**. Corollaire i. *Par un point* A *donné dans l'espace, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée* BC. En effet, si par le point A et la droite BC on mène un plan MN, on pourra tracer dans ce plan et par ce point une parallèle AD à cette droite : or, si l'on pouvait en mener une seconde AF, le plan déterminé par les deux parallèles AF et BC coïnciderait avec le plan MN (**18**) : donc on aurait par le point A, et dans ce plan, deux parallèles AF et AD à la même droite BC, ce qui est impossible (**64**).

428. Corollaire II. *Si une droite* AB *glisse sur une autre* CB *en restant constamment parallèle à elle-même, elle engendrera un plan,* sans quoi on pourrait mener par chacun des points de CB deux parallèles à AB : l'une tracée dans le plan ABC, et l'autre qui serait la droite mobile arrivée en ce point.

Théorème II.

429. *Si une droite* AO *est perpendiculaire à deux autres droites* BC *et* DF *menées par son* pied *dans le plan* MN, c'est-à-dire par le point où elle perce ce plan, *elle sera perpendiculaire à toute autre droite* GI *menée par son pied dans ce plan* (¹). Fig. 210.

Par deux points quelconques B et D, pris sur les côtés de l'angle BOD, dans lequel est tracée la droite OG, tirons la ligne BD, qui coupe IG en G; puis prolongeons AO d'une quantité OA′ = OA, et joignons les points A et A′ successivement avec chacun des trois points B, G, D. La droite OB étant ainsi perpendiculaire sur le milieu de AA′, les distances BA et BA′ sont égales (55). Par la même raison AD = DA′ : donc les triangles ABD et A′BD sont égaux (167); donc l'angle ABD est égal à son homologue A′BD; par conséquent les triangles ABG et A′BG sont égaux (159); donc le côté AG est égal à son homologue A′G; donc, si par le milieu O de AA′ on élève *dans le plan* AGA′ une perpendiculaire à cette droite, elle passera par le point G (59); donc elle aura deux points communs avec OG; donc elle coïncidera avec elle; donc OG est perpendiculaire sur AA′.

430. *On appelle* perpendiculaire a un plan *une*

(¹) La légitimité de cette hypothèse devient évidente en observant que l'on peut toujours tracer dans un premier plan conduit suivant AO une perpendiculaire au point O de cette droite, et répéter la même construction dans un second plan mené par AO. Il ne s'agira plus alors que de faire passer un plan par ces deux perpendiculaires.

droite qui est perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener, par son pied, dans ce plan. Réciproquement, *le plan est dit perpendiculaire à la droite.*

431. Il suit du théorème précédent que, pour s'assurer qu'une droite et un plan sont perpendiculaires entre eux, il suffit de vérifier que la droite est perpendiculaire à deux droites menées par son pied dans ce plan.

Théorème III.

432. *Si trois droites* BO, GO *et* DO *sont perpendiculaires sur une même droite* AA′ *et au même point* O, *ces trois droites seront dans un même plan perpendiculaire à cette droite* AA′.

Je dis, en effet, que si nous menons un plan par les deux premières droites BO et GO, la troisième DO sera dans ce plan : car si elle n'y est pas, conduisons un plan par les deux droites AA′ et DO, et soit D′O sa *trace* (¹) sur le plan BOG; la droite AA′ sera perpendiculaire sur D′O (429), et nous aurons ainsi dans le plan AOD deux perpendiculaires DO et D′O sur la droite AA′, et au même point O, ce qui ne se peut : donc DO est dans le plan BOG perpendiculaire à AA′; donc, etc.

433. Corollaire. *Le lieu géométrique de toutes les perpendiculaires élevées sur une droite par un même point, est un plan perpendiculaire à cette droite.*

Théorème IV.

434. *Par un point donné on peut toujours mener une perpendiculaire à un plan, mais on ne peut en tirer qu'une.*

(¹) L'intersection d'un plan par un autre plan, ou par une droite, se nomme la trace de ce second plan ou de cette droite sur le premier.

Il peut se présenter deux cas, suivant que le point donné est situé sur le plan ou hors du plan.

1er cas. Soit O un point donné sur le plan MN : je tire une droite quelconque BC dans ce plan; du point O j'abaisse la perpendiculaire OD sur cette droite, et par son pied D je mène une perpendiculaire quelconque DA à BC; je dis enfin que si on élève par le point O et dans le plan ODA une perpendiculaire OA à OD, cette droite OA sera perpendiculaire au plan MN. Pour le démontrer, je prolonge OA d'une quantité $OA' = OA$, je joins un point quelconque C de BC avec A, O et A', et je tire A'D. Puisque DO est perpendiculaire sur le milieu de AA', $A'D = AD$, et comme BC est perpendiculaire aux deux droites DA et DO, elle l'est à leur plan, et par conséquent à A'D; les triangles rectangles ADC et A'DC ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et ainsi $AC = A'C$; donc OC est perpendiculaire sur AA' (60); donc cette droite étant perpendiculaire aux deux droites OD et OC qui passent par son pied dans le plan MN, est perpendiculaire à ce plan. Fig. 211.

2e cas. Soit A un point donné hors du plan MN. J'abaisse la perpendiculaire AD sur une droite quelconque BC, tirée dans ce plan; puis par son pied D je mène dans le plan MN la perpendiculaire DO sur BC, et je dis que la perpendiculaire AO abaissée de A sur OD sera perpendiculaire au plan MN.

Répétez la démonstration précédente.

Il est évident que, par un même point, on ne peut tirer qu'une seule perpendiculaire au plan MN; car s'il était possible d'en mener deux, la trace de leur plan sur MN serait une perpendiculaire commune à ces deux droites (429), ce qui est absurde (30).

433. *On appelle* OBLIQUE *à un plan toute droite qui rencontre ce plan sans lui être perpendiculaire.*

Théorème V.

Fig. 212. **436.** *Si une perpendiculaire* OA, *et différentes obliques* AB, AC, AD, *à un plan* MN, *partent d'un même point* A, 1° *la perpendiculaire* AO *est plus courte que toute oblique ;* 2° *les obliques* AB *et* AC *qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire, sont égales ;* 3° *de deux obliques* AC *et* AD, *celle* AD *qui s'en écarte le plus est la plus longue.*

1° La perpendiculaire OA est plus petite que l'oblique AB, en vertu du théorème du n° 52.

2° Les obliques AB et AC sont égales; car elles sont les hypoténuses des deux triangles rectangles égaux AOB et AOC (159).

3° L'oblique AD est plus grande que AC; car si l'on prend OC′ = OC et que l'on joigne AC′, cette oblique sera égale à AC; mais puisque, par hypothèse, OD > OC, l'oblique AD > AC′, c'est-à-dire que AC.

437. Corollaire i. Réciproquement, *si deux obliques à un plan partent d'un même point et qu'elles soient égales, elles s'écarteront également du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan, et, si elles sont inégales, c'est la plus longue qui s'en écartera le plus.*

438. Corollaire ii. *La distance d'un point à un plan a pour mesure la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.*

Théorème VI.

Fig. 211. **439.** *Si du pied d'une perpendiculaire* AO *à un plan* MN, *on abaisse une perpendiculaire* OD *sur une droite* BC *tracée dans ce plan, et qu'on joigne le pied de cette seconde perpendiculaire avec un point quelconque* A *de la première, la droite de jonction* AD *sera perpendiculaire à la droite* BC *du plan.*

Prenons, en effet, sur BC les deux distances égales DB et DC, et joignons OB et OC, AB et AC. On

aura évidemment OB = OC (55), et par conséquent AB = AC (436) : donc, si l'on élève par le point D et dans le plan BAC une perpendiculaire sur BC, elle ira passer par le point A, et coïncidera ainsi avec AD, donc AD est précisément cette perpendiculaire.

440. Scholie. Les deux droites BC et AO ne se rencontrent évidemment pas, et cependant elles ne sont point parallèles : car, pour qu'elles le fussent, il faudrait encore qu'elles se trouvassent dans un même plan (62), lequel coïnciderait avec le plan MN, de sorte que la droite AO serait tout entière dans MN, ce qui n'est pas. Ainsi, *de ce que deux droites ne se rencontrent pas dans l'espace, il faut bien se garder de conclure qu'elles sont parallèles.*

Théorème VII.

441. *Deux perpendiculaires* AB *et* CD *a un même plan* MN *sont parallèles.* Fig. 213.

En effet, les deux droites AB et CD sont perpendiculaires à la droite BD qui joint leurs pieds : il suffit donc de prouver qu'elles sont dans un même plan. Pour y parvenir, j'élève au point D sur BD, et dans le plan MN, la perpendiculaire FG, et je joins AD : cette ligne sera perpendiculaire à FG (439); mais déjà CD est perpendiculaire à FG (430) : donc les droites BD, AD et CD sont dans un même plan (432); et, comme AB est aussi dans ce plan (16), le théorème se trouve démontré.

Théorème VIII.

442. Réciproquement, *si deux droites* AB, CD, *sont parallèles, et que l'une d'elles* AB *soit perpendiculaire à un plan* MN, *l'autre* CD *le sera aussi.*

En effet, s'il n'en est pas ainsi, on pourra mener par l'un des points de CD une perpendiculaire au plan MN, laquelle sera parallèle à AB. On aura donc par un même point deux parallèles à une même droite AB, ce qui ne se peut (427).

443. Corollaire i. *Deux droites parallèles à une troisième dans l'espace sont parallèles* : car, si l'on mène un plan perpendiculaire à cette troisième, il le sera aux deux autres (**442**), qui ainsi seront parallèles (**441**).

Fig. 214. **444**. Corollaire ii. *Si deux droites* AB, CD, *sont parallèles, et que par ces droites on mène deux plans* AE *et* CE *qui se coupent, leur commune intersection* FE *sera parallèle à ces droites.*

En effet, si par un point quelconque de FE on mène une parallèle à AB, elle le sera aussi à CD : donc elle devra se trouver à la fois dans les deux plans AE et CE (**427**); donc elle coïncidera avec leur intersection FE.

445. Scholie. Remarquons que chacune des deux droites AB et CD est *parallèle* à tout plan conduit par l'autre, c'est-à-dire qu'elle ne peut rencontrer ce plan : car, ces droites étant tout entières dans le plan ABCD, AB, par exemple, ne pourra rencontrer un plan mené suivant CD qu'autant qu'elle rencontrera l'intersection de ce plan avec ABCD, c'est-à-dire CD, ce qui ne se peut. Ainsi *toute droite parallèle à une droite tracée dans un plan est parallèle à ce plan.*

446. *On appelle* projection *d'un* point *sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.* Cette projection est unique (**434**).

447. *On appelle projection d'une* ligne *sur un plan le lieu des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de cette ligne sur ce plan, que l'on nomme* le plan de projection.

448. Il suit de cette définition, que *la projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite* : car le lieu des perpendiculaires abaissées de ses différents points sur ce plan est un plan (**441** et **428**). Or, deux points suffisent pour déterminer une droite : donc il suffira, pour déterminer la projection d'une droite, de joindre les projections de deux quelconques de ses points, ou, mieux encore, de joindre sa trace

sur le plan donné avec la projection de l'un quelconque de ses points.

449. *On appelle* PLAN PROJETANT *d'une droite le lieu des perpendiculaires abaissées de ses différents points sur le plan de projection.*

Théorème IX.

450. *Deux plans* MN, PQ, *perpendiculaires à une même droite* AB, *sont parallèles,* c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas se rencontrer. Fig. 215.

En effet, s'ils pouvaient se rencontrer, en joignant un point quelconque O de leur intersection avec les traces de la droite AB sur ces plans, les droites OA et OB seraient tout entières dans les plans respectifs MN et PQ, et par conséquent perpendiculaires à AB, ce qui ne se peut.

Théorème X.

451. *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième, sont parallèles.*

Car ces intersections ne peuvent se rencontrer, puisqu'elles sont tout entières dans deux plans parallèles; d'ailleurs elles sont dans un même plan : donc elles sont parallèles (**62**).

Théorème XI.

452. *Si deux plans* MN, PQ *sont parallèles, toute perpendiculaire* AB *élevée sur l'un d'eux* MN, *l'est aussi sur l'autre* PQ.

D'abord la droite AB rencontrera le plan PQ : car si, par un point quelconque G de PQ, et par la droite AB, on mène un plan, ses traces CD et FG sur MN et sur PQ, seront parallèles : donc AB, qui rencontre la première, rencontrera aussi la seconde (**64**), et partant le plan PQ; de plus AB sera perpendiculaire à FG, puisqu'elle l'est, par hypothèse, à CD : donc, étant perpendiculaire à *toute* droite menée par son pied dans le plan PQ, elle le sera à ce plan.

453. Scholie. Puisque toute droite qui coupe le plan MN rencontre aussi le plan parallèle PQ, on voit que toutes les parallèles que l'on peut mener au plan PQ par un point quelconque de MN, sont situées dans ce dernier plan. Ainsi *le lieu de toutes les parallèles que l'on peut mener par un point donné à un même plan, est un second plan parallèle à celui-ci.*

454. Corollaire. *Par un point donné on ne peut mener qu'un seul plan parallèle à un autre.*

Théorème XII.

455. *Les parties* AB, GD *de deux parallèles comprises entre deux plans parallèles* MN, PQ, *sont égales.*

Car, si l'on mène un plan par ces deux parallèles, ses traces AD et BG, sur nos deux plans, seront parallèles (**451**) : donc AB = GD (**175**).

456. Corollaire i. *Deux plans parallèles sont partout équidistants* : car les perpendiculaires abaissées de deux points quelconques de l'un sur l'autre sont parallèles (**441**), et par conséquent égales.

457. Corollaire ii. *Les parallèles comprises entre une droite et un plan parallèle sont égales.*

Théorème XIII.

Fig. 216. **458.** *Si deux angles* B *et* B′ *ont leurs côtés parallèles, 1° leurs plans seront parallèles; 2° ils seront égaux si les côtés parallèles sont dirigés dans le même sens ou en sens directement contraires; 3° ils seront supplémentaires si, deux côtés parallèles étant dirigés dans le même sens, les deux autres le sont en sens opposés.*

1° Si le plan ABC n'est pas parallèle à A′B′C′, nous pourrons mener par le point B un plan parallèle à A′B′C′, lequel ne pourra passer à la fois par les deux droites AB et BC, sans quoi il coïnciderait avec ABC. Supposons donc qu'il ne soit pas dirigé suivant BA, et soit BM sa trace sur le plan ABA′B′. Cette trace

sera parallèle à A′B′ (**451**), et ainsi on aura par le point B deux parallèles AB et BM à cette droite, ce qui ne se peut : donc le plan ABC est parallèle à A′B′C′.

2° Supposons que les angles B et B′ aient leurs côtés dirigés dans le même sens. Prenons BA = B′A′, BC = B′C′; joignons AC, A′C′, BB′, AA′ et CC′. Ces deux dernières sont égales et parallèles à BB′ (**178**), et par conséquent égales et parallèles entre elles : donc le quadrilatère AC′ est un parallélogramme, et ainsi AC = A′C′; par conséquent les triangles ABC et A′B′C′ sont équilatéraux entre eux; donc leurs angles homologues B et B′ sont égaux.

Les deux autres cas se démontrent comme aux n^os **71** et **72**.

459. Corollaire. *Si deux droites sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont parallèles* (**451**).

La réciproque n'est pas vraie; seulement on peut conclure que *si les projections de deux droites sur un même plan sont parallèles, leurs plans projetants sont parallèles :* car ces plans sont déterminés par ces projections et par les perpendiculaires élevées par un point de chacune d'elles sur le plan de projection.

D'où l'on voit que *deux droites sont parallèles quand leurs projections sur deux plans qui se coupent sont parallèles :* car les deux plans projetants de l'une sont parallèles aux deux plans projetants de l'autre; et il est évident que si deux plans parallèles sont coupés par deux autres plans parallèles, les quatre droites qui résultent de leurs intersections sont parallèles; or, de ces quatre intersections, deux sont les droites proposées.

460. Scholie. Le théorème du n° **226** est vrai pour deux angles situés dans l'espace.

Théorème XIV.

461. *Trois plans parallèles* MN, PQ, RS, *cou-* Fig. 217.

pent deux droites quelconques AC, A′C′, *en parties proportionnelles,* c'est-à-dire que l'on aura la proportion

AB : BC :: A′B′ : B′C′.

Pour le démontrer, je mène par le point A une parallèle AE à A′C′, et il est clair que les parties AD et DE de cette droite seront respectivement égales à A′B′ et à B′C′ (**455**). Or, si l'on conduit un plan par AC et par AE, ses traces BD et CE, sur les plans PQ et RS, seront parallèles, et on aura par conséquent

AB : BC :: AD : DE,

ou, ce qui revient au même,

AB : BC :: A′B′ : B′C′.

462. Scholie. La réciqroque de cette proposition n'est pas vraie : car deux points ne suffisent pas pour déterminer un plan ; toutefois, on ne peut faire passer par les points homologues A et A′, B et B′, C et C′ qu'un seul système de trois plans parallèles. Menons en effet par le point A une parallèle à A′C′ et prenons sur cette droite des parties AD = A′B′ et DE = B′C′, les trois droites AA′, DB′ et EC′ seront parallèles (**178**) et les deux droites BD et CE le seront aussi, puisqu'elles divisent AC et AE en parties proportionnelles. Donc le plan BDB′ sera parallèle à CEC′ (**458**) et à celui qui passera par AA′ et la parallèle AF à BD. Mais on voit qu'il n'y a que ce système de trois plans parallèles qui puisse passer par les points A et A′, B et B′, C et C′ : car le plan moyen devant couper AE dans le même rapport que AC et que A′C′, passe nécessairement par le point D, et coïncide ainsi avec BDB′.

463. Corollaire i. Deux plans parallèles coupent un système de droites issues du même point en parties proportionnelles.

464. Corollaire ii. *Si l'on partage en parties proportionnelles plusieurs droites issues du même point et terminées au même plan, les points de division se trouveront dans un même plan parallèle à celui-ci.*

Problème I.

465. *Par un point donné mener une perpendiculaire à un plan donné* MN.

Il y a deux cas à considérer selon que le point donné sera situé hors du plan MN ou sur ce plan.

1er cas. Soit A le point donné hors du plan MN : Fig. 212.
répétez la construction indiquée au deuxième cas du nº **434**, ou mieux, marquez sur le plan MN trois points B, C, D équidistants de A, et joignez ce point A avec le centre du cercle déterminé par les trois points B, C, D (**437**).

2e cas. Soit O le point donné sur le plan MN : ré- Fig. 211.
pétez la construction indiquée au premier cas du nº **434**, ou bien menez par le point O une parallèle à une perpendiculaire abaissée sur le plan MN.

Problème II.

466. *D'un point donné* A *abaisser une perpendiculaire sur une droite* BC *située dans le plan* MN.

Abaissez du point A une perpendiculaire AO sur le plan MN, puis du point O une perpendiculaire sur BC et joignez le pied D de celle-ci avec le point A (**459**).

Problème III.

467. *Trouver la plus courte distance de deux* Fig. 218.
droites AB, CD, *qui ne sont pas situées dans un même plan.*

Cette plus courte distance de deux droites AB et CD est évidemment une ligne droite (8); de plus elle est perpendiculaire aux deux droites AB et CD : car si elle était oblique sur AB, par exemple, elle serait plus longue que la perpendiculaire abaissée sur AB du point où elle coupe CD, ce qui ne se peut. Il s'agit donc de mener une perpendiculaire commune aux deux droites AB et CD.

Pour cela, je mène, par un point quelconque de CD, une parallèle CF à AB; et, d'un point quelconque B de

celle-ci, j'abaisse la perpendiculaire BG sur le plan de l'angle FCD; par le point G je tire GI parallèle à CF, et par conséquent à AB; et, par le point I, IK parallèle à BG. Cette droite IK est perpendiculaire aux deux droites AB et CD: car elle est perpendiculaire au plan FCD, puisquelle est parallèle à BG (**442**); donc elle est perpendiculaire à CD et à IG, et partant à AB.

Je dis maintenant que le problème n'admet qu'une solution. Supposons, en effet, que l'on puisse mener une seconde perpendiculaire MN aux deux droites AB et CD. Si par le point N on tire la parallèle NE à AB, MN sera perpendiculaire sur NE, et partant au plan FCD: donc elle sera dans le plan ABGI, qui est le lieu de toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de AB sur le plan FCD (**449**): donc elle devra rencontrer CD au point I, ce qui est absurde (**30**); donc KI est la seule perpendiculaire que l'on puisse mener à la fois sur AB et sur CD.

468. Scholie. Les deux droites AB et CD, qui ne se rencontrent pas, ont cependant, l'une à l'égard de l'autre, une certaine *inclinaison* que l'on mesure par l'angle que font entre elles deux parallèles menées à chacune de ces droites par un même point de l'espace, ou, plus simplement, par l'angle que forme l'une d'elles avec une parallèle menée à l'autre par l'un de ses points. Ainsi l'angle FCD est la mesure de l'inclinaison des deux droites AB et CD.

Fig. 219. **469**. Quant à l'*inclinaison* d'une droite AB sur un plan MN, on doit évidemment prendre pour sa mesure le plus petit des angles qu'elle forme avec les différentes droites que l'on peut mener dans ce plan par le point B, où elle le perce. Or, cet angle *minimum* est celui même que la droite dont il s'agit fait avec sa projection sur ce plan. En effet, pour avoir la projection de AB sur MN, j'abaisse de l'un quelconque de ses points une perpendiculaire AO sur ce plan, et je joins BO (**448**). Cela posé, soit BC une droite quelconque menée par

le point B dans le plan MN. Je prends BC = BO et je joins AC. Les deux triangles ABO et ABC ont le côté commun AB, le côté BO = BC, et le troisième côté AO du premier est plus petit que le troisième côté AC du second : donc l'angle ABO est plus petit que ABC (**165**); donc

*L'*INCLINAISON *d'une droite sur un plan a pour mesure l'angle qu'elle fait avec sa projection sur ce plan.*

470. PROBLÈMES A RÉSOUDRE. 1° *Quel est le lieu de tous les points équidistants de deux points donnés?*

2° *Quel est le lieu de ~~deux~~ points équidistants d'une circonférence donnée?*

3° *Démontrer que tout plan parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère* GAUCHE [1] *coupe les deux autres côtés en parties proportionnelles, et que réciproquement toute droite qui coupe en parties proportionnelles deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche est dans un plan parallèle aux deux autres côtés?*

4° *Prouver que deux droites parallèles sont également inclinées sur un même plan.*

CHAPITRE II.

DES ANGLES DIÈDRES ET POLYÈDRES.

471. *On appelle* ANGLE DIÈDRE *la portion indéfinie de l'espace comprise entre deux plans qui se coupent, et sont terminés à leur ligne d'intersection.* Cette droite se nomme *l'arête* de l'angle dièdre, et les deux plans qui le comprennent en sont les *faces*. Ainsi, la droite BC est l'arête de l'angle dièdre ABCD, et les plans AC et BD en sont les faces. On désigne, comme on Fig. 220.
voit, un angle dièdre par *quatre* lettres, dont les deux extrêmes indiquent des points quelconques de ses faces,

---

[1] On appelle ainsi un quadrilatère dont les quatre côtés ne sont pas dans un même plan.

et dont les deux moyennes appartiennent à l'arête. Quelquefois même on dénomme un angle dièdre seulement par les deux lettres placées sur l'arête; mais il faut, pour cela, que cette arête ne soit pas commune à d'autres angles dièdres. Ainsi, dans la figure 210 on dira très-bien l'angle dièdre BC pour désigner l'angle formé par les deux plans A C et BD.

472. Si par un point quelconque G de l'arête de l'angle dièdre BC on mène dans chacune de ses faces les perpendiculaires GF et GI à cette arête, elles formeront un angle FGI, que l'on nomme *l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre* BC, et cet angle est le même, quelle que soit la position de son sommet G sur l'arête. On voit en effet que, si l'on fait la même construction pour tout autre point L de cette arête, l'angle KLO sera égal à FGI, puisqu'ils auront leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens.

Théorème I.

473. *Deux angles dièdres* BC *et* B′C′ *sont égaux lorsque leurs angles rectilignes correspondants* FGI et F′G′I′ *sont eux-mêmes égaux.*

En effet, on pourra superposer les deux angles égaux FGI et F′G′I′ de manière qu'ils coïncident parfaitement, et alors les arêtes BC et B′C′, qui sont respectivement perpendiculaires aux plans de ces angles (451), coïncideront (434); les deux droites F′G′ et B′C′ étant ainsi placées sur FG et sur BC, le plan A′C′ se confondra avec le plan AC; il en sera de même du plan B′D′ à l'égard de BD, et par conséquent les deux angles dièdres BC et B′C′ coïncideront : donc ils sont égaux.

Théorème II.

474. Réciproquement, *si deux angles dièdres* BC et B′C′ *sont égaux, leurs angles rectilignes correspondants* FGI *et* F′G′I′ *seront aussi égaux.*

On pourra placer, en effet, ces deux angles dièdres de manière qu'ils se recouvrent parfaitemont, et que le point G′ soit sur G. Mais alors les perpendiculaires F′G′ et

FG aux arêtes B'C' et BC, coïncideront. Il en sera de même des droites G'I' et GI, de sorte que l'angle F'G'I' se confondra avec FGI : donc ces angles sont égaux.

475. *Un plan* AB *est* PERPENDICULAIRE *sur un autre* MN *lorsqu'il forme avec lui deux angles dièdres adjacents égaux* ACBM *et* ABCN. *On dit alors que ces angles dièdres sont* DROITS. Fig. 221.

THÉORÈME III.

476. *L'angle rectiligne correspondant à un angle dièdre droit, est aussi droit.*

On voit en effet que, si par le point G on mène dans les plans MN et AB les perpendiculaires IK et FG à l'arête BC, les angles rectilignes FGI et FGK, correspondants aux angles dièdres égaux ACBM et ABCN, seront égaux, et par conséquent droits.

THÉORÈME IV.

477. Réciproquement, *si l'angle rectiligne* FGI, *correspondant à l'angle dièdre* ACBM, *est droit, cet angle dièdre sera aussi droit.*

Car l'angle FGK, adjacent à FGI, sera droit; donc les deux angles dièdres ACBM et ABCN, qui leur correspondent, sont égaux, et sont par conséquent droits.

478. COROLLAIRE. *Tout plan* AB *conduit suivant une perpendiculaire* FG *à un autre plan* MN, *est perpendiculaire à celui-ci.*

THÉORÈME V.

479. *Si deux plans* AB *et* MN *sont perpendiculaires entre eux, et que l'on mène dans le premier une perpendiculaire* FG *à leur intersection* BC, *cette droite sera perpendiculaire au second.*

Élevons, en effet, dans le plan MN la perpendiculaire GK sur l'intersection BC; l'angle FGK sera le rectiligne correspondant à l'angle dièdre ABCN, et sera par conséquent droit; donc la ligne FG, perpendiculaire

aux deux droites BC et GK, menées par son pied dans le plan MN, sera perpendiculaire à ce plan.

Théorème VI.

480. Réciproquement, *si deux plans* AB *et* MN *sont perpendiculaires entre eux, et que par un point quelconque* G *de leur intersection on élève une perpendiculaire* GF *sur le second, cette droite sera située dans le premier.*

Appliquez le précepte du n° 48.

Théorème VII.

481. *Si deux plans* AB *et* CD *qui se coupent sont perpendiculaires à un troisième* MN, *leur commune intersection* FG *est perpendiculaire à ce troisième.*

Car, si par le point G commun aux trois plans on élève une perpendiculaire au plan MN, elle devra se trouver à la fois dans les deux plans AB et ED (**480**); donc elle sera leur intersection même FG.

Théorème VIII.

Fig. 222. **482.** *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* PQ, *la projection* BA′ *de cette droite sur un plan quelconque* MN, *sera perpendiculaire à la trace* QR *du plan dont il s'agit sur le plan de projection.*

Car, puisque la droite AB est perpendiculaire au plan donné PQ, son plan projetant ABA′ est perpendiculaire à celui-ci (**478**); mais il l'est aussi au plan de projection MN (**449**). Ainsi, le plan donné PQ et le plan de projection MN étant perpendiculaires au plan projetant de la droite, leur commune section, c'est-à-dire la trace QR du plan donné, sera perpendiculaire à ce plan projetant ABA′ (**481**), et partant à la projection BA′ de la droite, qui est une ligne tracée dans ce plan.

483. Scholie. La réciproque n'est pas vraie ; on peut dire seulement que *si la projection* BA′ *d'une droite*

sur un plan MN *est perpendiculaire à la trace* QR *d'un plan donné* PQ *sur celui-ci, le plan projetant de la droite est perpendiculaire au plan donné.* En effet, cette trace QR est perpendiculaire au plan projetant de la droite (479) : donc le plan donné est perpendiculaire à ce plan projetant (478).

Il suit de là que, *lorsque les projections d'une droite sur deux plans qui se coupent sont perpendiculaires aux traces d'un plan sur ces deux-là, la droite est perpendiculaire à ce plan*; car, les deux plans projetants de la droite étant perpendiculaires à ce plan, leur commune section, c'est-à-dire cette droite, l'est aussi.

THÉORÈME IX.

484. *Deux angles dièdres* ABCD *et* EFGH *sont proportionnels à leurs angles rectilignes correspondants* IKL *et* MNO. Fig. 223.

Il peut se présenter deux cas, suivant que les angles IKL et MNO seront commensurables ou qu'ils ne le seront pas.

1° *Supposons que les angles* IKL *et* MNO *soient commensurables*, et que leur commune mesure soit contenue 5 fois dans le premier et 3 fois dans le second; le rapport des deux angles IKL et MNO sera donc $\frac{5}{3}$. Si par les droites de division et les arêtes BC et FG on fait passer des plans, on aura partagé les angles dièdres ABCD et EFGH respectivement en 5 et en 3 parties égales, et comme les parties du premier sont égales à celles du second (475), car il en est ainsi des subdivisions des angles IKL et MNO, on voit que le rapport de ABCD à EFGH est aussi $\frac{5}{3}$; donc

$$ABCD : EFGH :: IKL : MNO.$$

2° *Supposons que les angles* IKL *et* MNO *soient incommensurables.* Je partage l'angle MNO en un nombre quelconque de parties égales, et je porte l'une de ces parties sur IKL autant de fois qu'elle pourra y être contenue : soit QKL le reste que je trouverai ainsi; Fig. 224.

je fais passer un plan par la droite QK et par l'arête BC, et comme les angles IKQ et MNO sont commensurables, etc. ([1]).

Théorème X.

485. *Un angle dièdre a pour mesure l'angle rectiligne correspondant.*

Mesurer un angle dièdre, c'est chercher le rapport de cet angle à un autre angle dièdre pris pour unité. Si donc A est l'angle dièdre à mesurer et D l'unité d'angle dièdre, la mesure de A sera le rapport de A à D. Mais nous venons de voir que deux angles dièdres sont proportionnels à leurs angles rectilignes correspondants : si donc B et C représentent ces angles rectilignes, le rapport $\frac{A}{D}$ sera le même que celui $\frac{B}{C}$, et par conséquent ce dernier sera la mesure de A. Or, *si l'on convient* de prendre l'angle C pour unité d'angle rectiligne, le rapport $\frac{B}{C}$ sera la mesure de l'angle B : donc la mesure de l'angle B sera aussi celle de l'angle dièdre A ; donc *un angle dièdre a pour mesure son angle rectiligne correspondant* ([2]), en attachant à cette manière de s'énoncer le sens que nous avons expliqué au n° **110**.

([1]) On peut dire avec *Ampère :*

Fig. 224. Portons l'angle MNO sur IKL autant de fois que la chose sera possible, nous trouverons qu'il y est contenu *deux* fois avec le reste QKL, de sorte que

$$IKL = 2MNO + QKL.$$

Mais si nous faisons passer des plans par les droites de division KQKP, et par l'arête BC, nous formerons les deux angles dièdres PBCI et QBCP égaux à EFGH (473), etc.

([2]) On pourrait demander si un angle dièdre peut avoir pour mesure un angle rectiligne autre que celui qui est formé par deux perpendiculaires menées dans chaque face sur l'arête et au même point. Si cela était, il faudrait d'abord que les deux côtés de cet angle fussent également inclinés sur l'arête : car l'angle dièdre et l'angle rectiligne qui lui sert de mesure devant varier

486. SCHOLIE. Si l'on compare les énoncés des théorèmes **105**, **106**, **108**, et **109**, à ceux des propositions **473**, **474**, et **483**, on verra que l'angle rectiligne correspondant à un angle dièdre est, à l'égard de cet angle dièdre, ce qu'est à l'égard d'un angle rectiligne l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.

Remarquons encore que, les angles dièdres étant dans l'espace ce que sont les angles rectilignes sur le plan où ils sont tracés, on peut en conclure que, *quand deux plans se coupent, les angles dièdres adjacents valent ensemble deux angles dièdres droits, et* que *ceux qui sont opposés par l'arête sont égaux;* que, *quand deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les angles dièdres alternes-internes, ou alternes-externes, ou correspondants, sont égaux,* etc. Il suffirait, pour le démontrer, de mener un plan per-

---

dans le même rapport, il faut nécessairement que le second devienne nul en même temps que le premier. Cela posé, considérons les trois angles dièdres ABCQ, QBCD et ABCD et supposons qu'ayant tracé dans leurs faces les droites KI, KQ et KL, on ait la suite de rapports égaux, Fig. 224.

$$ABCQ : IKQ :: QBCD : QKL :: ABCD : IKL;$$

on en tirera :

$$ABCQ + QBCD : IKQ + QKL :: ABCD : IKL.$$

Mais les antécédents de cette proportion sont égaux : donc les conséquents doivent l'être aussi. Donc

$$IKL = IKQ + QKL,$$

ce qui exige que les trois droites KI, QK et KL soient dans un même plan, sans quoi on pourrait les regarder comme étant les arêtes d'un angle trièdre, et l'on aurait en conséquence (493): $IKL < IKQ + QKL$. Cela posé, si l'on prend les trois distances égales KI, KQ et KL, et que l'on joigne BI, BQ et BL, ces trois dernières lignes seront trois obliques égales menées du point B sur le plan KIQL, car les triangles BKI, BKQ et BKL, ont un angle égal compris entre côtés égaux. Donc la perpendiculaire abaissée du point B sur ce plan tombera en K, et coïncidera ainsi avec BK. Donc, pour que l'angle IKL puisse servir de mesure à l'angle dièdre ABCD, il faut que ses côtés soient perpendiculaires à l'arête de cet angle dièdre.

pendiculaire à l'arête de l'un des angles dièdres que l'on compare.

On devra observer toutefois que *les réciproques de ces dernières propositions ne sont vraies qu'autant que les angles dièdres dont il s'agit ont leurs arêtes parallèles;* car deux plans qui ne sont pas parallèles peuvent très-bien former des angles égaux avec un troisième.

Fig. 225. **487**. *On appelle* ANGLE POLYÈDRE *la portion indéfinie de l'espace comprise entre plusieurs plans qui passent par le même point, et qui se terminent à leurs communes intersections.* Ce point est le *sommet* de l'angle polyèdre, ces intersections en sont les *arêtes*, et les angles plans que chacune forme avec la suivante en sont les *faces*. Ainsi S est le sommet de l'angle polyèdre SABCDE; les droites SA, SB, SC, SD, SE, sont ses arêtes, et les angles ASB, BSC, CSD, DSE, ESA, sont ses faces. On désigne, comme on voit, un angle polyèdre par la lettre du sommet suivie de celles qui sont placées respectivement sur un point de chaque arête. Souvent aussi on le dénomme par la lettre seule de son sommet; mais il faut pour cela que ce sommet ne soit pas commun à d'autres angles polyèdres. Ainsi, dans la figure 225, nous dirons très-bien l'angle S pour désigner l'angle polyèdre SABCDE.

488. Si une ligne droite, tracée d'une manière quelconque, ne peut rencontrer la surface d'un angle polyèdre en plus de deux points, on dit que cet angle polyèdre est *convexe* ou à *angles dièdres saillants*; dans le cas contraire, il est dit *concave* ou à *angles dièdres rentrants*. L'angle S de la figure 225 est convexe, et celui T de la figure 226 est concave. Les an-
Fig. 226. gles dièdres saillants de ce dernier sont TA, TB, TD, TE, TF, TG, et il n'a qu'un angle dièdre rentrant TC. Cet angle rentrant vaut quatre angles dièdres droits, moins l'angle dièdre BTCD, qui nous présente son ouverture.

489. Quand nous parlerons d'un angle polyèdre, il

s'agira toujours d'un angle convexe, à moins que nous n'exprimions le contraire.

490. On distingue les angles polyèdres d'après le nombre de leurs faces ou de leurs angles dièdres, et on leur a donné des noms qui désignent précisément le nombre de ces faces ou de ces angles dièdres. Ainsi on appelle

angle trièdre ou simplement *trièdre* l'angle polyèdre qui a.................... 3 faces,
angle tétraèdre, un angle polyèdre qui a.... 4
angle pentaèdre.......................... 5
angle hexaèdre.......................... 6
etc.

Remarquons que *le trièdre est le plus simple des angles polyèdres*, et que l'on peut partager un angle polyèdre quelconque en trièdres, comme on partage un polygone en triangles.

Théorème XI.

491. *Si d'un point* S′, *pris dans l'*INTÉRIEUR *d'un* Fig. 227.
trièdre S, *on abaisse sur ses faces* ASB, ASC *et* BSC, *les perpendiculaires respectives* S′C′, S′B′ *et* S′A′, *et que par ces perpendiculaires prises deux à deux, on fasse passer des plans, on formera un second trièdre* S′, *et les deux trièdres* S *et* S′ *jouiront de ces deux propriétés*, 1° *que les arêtes de chacun seront perpendiculaires aux faces de l'autre*; 2° *que les faces de chacun seront les suppléments des angles dièdres de l'autre*.

1° On voit que l'arête SA, par exemple, est perpendiculaire à la face B′S′C′, dont les arêtes sont supposées perpendiculaires aux faces ASB et ASC adjacentes à SA; car le plan B′S′C′ est perpendiculaire à la fois aux deux plans ASB et ASC (**478**), et par conséquent à leur commune section SA (**481**).

2° Je dis que *l'angle dièdre* C′S′B′A′, *dont l'arête* S′B′ *est perpendiculaire au plan de la face* ASC, *a cette face pour supplément*. En effet, cette arête étant

perpendiculaire aux traces AB′ et B′C des faces C′S′B′ et A′S′B′ sur le plan ASC, l'angle AB′C est le rectiligne correspondant à l'angle dièdre S′B′; mais la somme des angles du quadrilatère convexe SAB′C (on a pu choisir le point S′ de manière que les perpendiculaires issues de ce point tombent sur les faces de S et non sur leurs prolongements) vaut quatre droits; et comme les angles A et C sont droits, puisque les arêtes SA et SC sont perpendiculaires aux faces B′S′C′ et B′S′A′, on voit que les angles ASC et AB′C sont supplémentaires.

492. Scholie. Les deux trièdres S et S′ sont dits *supplémentaires* l'un de l'autre, parce que chaque face de l'un est le supplément de celui des angles dièdres de l'autre dont l'arête est perpendiculaire au plan de cette face.

Remarquons que ces trièdres seraient encore supplémentaires, quelle que fût la position du sommet S′, si les arêtes de ce dernier étaient encore dirigées dans le même sens par rapport aux faces du trièdre S; car on pourrait regarder cet angle S′ comme étant le trièdre supplémentaire de S, que l'on aurait transporté dans l'espace (**496**).

Théorème XII.

493. *Dans tout trièdre une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres et plus grande que leur différence.*

Fig. 228. 1° Soit ASC la plus grande des trois faces : je dis que ASC $<$ ASB $+$ BSC.

Traçons, en effet, dans le plan de la face ASC la droite SD, qui fasse avec SC un angle DSC $=$ BSC, et tirons la droite AC d'un point quelconque de SA à un autre point quelconque de SC. Cette droite coupera SD en un certain point D. Prenons ensuite SB $=$ SD, et joignons BA et BC. Le triangle BSC est égal à DSC : Donc DC $=$ BC. Or la droite AC est plus petite que la ligne brisée ABC : donc, en retranchant d'une part DC, et de l'autre son égale BC, il restera AD $<$ AB. Mais le côté SA est commun aux deux

triangles ASD et ASB, et SD = SB : donc l'angle ASD, opposé au côté AD, est plus petit que l'angle ASB opposé au côté correspondant AB. Si donc on ajoute au premier l'angle DSC, et au second l'angle égal BSC, on aura ASD + DSC, c'est-à-dire ASC < ASB + BSC, ce qu'il fallait démontrer.

2° La seconde partie du théorème est une conséquence nécessaire de la première.

Théorème XIII.

494. *Dans tout angle polyèdre* CONVEXE S *la* Fig. 225.
somme des faces est plus petite que quatre droits.

Coupons l'angle polyèdre proposé S par un plan qui rencontre toutes ses arêtes [1], et soit ABCDE le polygone formé par les traces de ce plan sur les faces de S. Prenons dans l'intérieur de ce polygone un point quelconque O, et joignons-le à tous les sommets A, B, C, D, E : nous formerons autour de ce point autant de triangles qu'il y en a autour de S, de sorte que la somme des angles des uns sera égale à celle des angles des autres; par conséquent, si l'on démontre que la somme des angles à la base des premiers triangles est moindre que la somme des angles à la base des seconds, on devra en conclure que, par compensation, la somme des angles autour du sommet S sera moindre que celle des angles autour du sommet O; et, comme celle-ci vaut quatre droits, le théorème se trouvera ainsi démontré.

Or, au point A nous avons un trièdre formé par les plans SAE, EAB et BAS; donc, en vertu du théorème précédent l'angle EAB, c'est-à-dire EAO + OAB,

---

[1] La chose sera toujours possible. Prolongeons, en effet, les plans de deux faces non adjacentes jusqu'à leur rencontre, nous formerons un angle dièdre, dans lequel l'angle polyèdre sera compris; car, puisqu'il est convexe, le plan d'aucune de ses faces ne peut rencontrer sa surface. Si donc on mène par l'arête de cet angle dièdre un plan qui lui soit extérieur, les arêtes de l'angle S seront toutes situées d'un même côté de ce plan, de sorte qu'en faisant passer par un point de l'une de ces arêtes un plan parallèle à celui-ci, il coupera toutes les autres arêtes.

est moindre que $SAE + SAB$. On verra de même que $ABO + OBC < SBA + SBC$, et ainsi de suite : donc la somme des angles à la base de tous les triangles dont le sommet est en O est plus petite que la somme des angles à la base des triangles dont le sommet est en S. Ainsi dans tout angle polyèdre convexe la somme des faces est moindre que quatre angles droits.

Cette démonstration exige bien que l'angle S soit convexe : car, si l'angle dièdre SB, par exemple, était rentrant, au lieu d'avoir $ABO + OBC < SBA + SBC$, on aurait $4 - (ABO + OBC) < SBA + SBC$; ainsi le théorème ne serait plus vrai.

Théorème XIV.

495. *La somme des anlges dièdres d'un trièdre quelconque est plus grande que* DEUX *droits, et plus petite que* SIX *droits.*

Construisons, en effet, le trièdre S′ supplémentaire du trièdre proposé S. La somme des angles dièdres de celui-ci, augmentée de celle des faces de l'autre, formera *six* droits : donc la somme de ces angles dièdres est moindre que *six* droits. D'un autre côté, la somme des faces de S′ est moindre que quatre droits : donc la somme des angles dièdres de S est plus grande que *deux* droits, puisque ces deux sommes réunies forment six droits.

Théorème XV.

Fig. 229. **496**. *Si deux trièdres* S *et* S′ *ont leurs faces égales chacune à chacune,* savoir : $ASC = A'S'C$, $ASB = A'S'B'$, *et* $BSC = B'S'C'$, *leurs angles dièdres homologues,* c'est-à-dire ceux qui sont opposés à des faces égales, *sont égaux.*

Prenons sur les arêtes des deux trièdres les six distances égales SA, SB, SC, S′A′, S′B′ S′C′ et joignons AB, AC, BC, A′B′, A′C′, B′C′. Nous formerons ainsi six triangles *isocèles* égaux chacun à chacun (**159**) : donc $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $AC = A'C'$, d'où il suit que les triangles ABC et A′B′C′ sont égaux et que par

conséquent leurs angles homologues le sont aussi. Cela posé, pour démontrer que l'angle dièdre SA, par exemple, est égal à S'A', je mène par un point quelconque E de son arête un plan GEF qui lui soit perpendiculaire et les traces de ce plan sur ceux des faces ASB et ASC formeront l'angle rectiligne correspondant au dièdre SA. Je prends ensuite A'E' = AE et je mène de même par le point E' un plan G'E'F' perpendiculaire à S'A'. Il s'agit de prouver que l'angle GEF = G'E'F'. Or, j'observe d'abord que les côtés de ces angles étant respectivement perpendiculaires à SA et à S'A' rencontreront nécessairement AB et AC en F et en G, A'B' et A'C' en F' et en G' (**63**); je tire donc FG et F'G' et je forme ainsi deux triangles EFG et E'F'G' que je dis être égaux (**167**). En effet, les triangles EAG et E'A'G' sont égaux (**161**), donc EG = E'G' et AG = A'G'. Par une raison semblable, EF = E'F' et AF = A'F'; donc les triangles AFG et A'F'G' ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, donc FG = F'G' et par conséquent l'angle FEG = F'E'G'.

Théorème XVI.

497. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune et* SEMBLABLEMENT DISPOSÉES (¹).

Portons, en effet, le trièdre S' sur le trièdre S, en plaçant la face A'S'B' sur son égale ASB de manière que leurs arêtes homologues coïncident. Alors le plan de la face A'S'C' tombera sur celui de ASC, puisque les deux angles dièdres SA et S'A' sont égaux (**496**), et que, les faces homologues étant semblablement disposées, les arêtes SC et S'C' doivent se trouver d'un même côté du plan commun ASB; mais l'angle A'S'C' = ASC,

(¹) C'est-à-dire que, si l'on place deux faces égales l'une sur l'autre en faisant coïncider leurs arêtes homologues, les deux arêtes restantes seront situées d'un même côté de la face commune.

donc, l'arête S'C' se dirigera suivant SC, et les deux faces B'S'C' et BSC coïncideront nécessairement.

498. Scholie I. Si les faces homologues n'étaient pas semblablement disposées, il arriverait que, quand on aurait superposé les faces A'S'B' et ASB, en plaçant S'A' sur SA et S'B' sur SB, il arriverait, dis-je, que les arêtes S'C' et SC se trouveraient de part et d'autre du plan ASB, de sorte que la coïncidence des deux trièdres n'aurait plus lieu. En vain voudrait-on renverser le trièdre S' sens dessus dessous, et placer S'A' sur SB et S'B' sur SA, afin de ramener les deux arêtes S'C' et SC d'un même côté du plan ASB : car alors le dièdre S'A' répondrait au dièdre SB; et, comme ces dièdres sont inégaux aussi bien que les faces A'S'C' et BSC, il serait toujours impossible de faire coïncider les trièdres S et S', bien que toutes leurs parties homologues soient égales. On dit alors que les deux trièdres sont *symétriques*. Ainsi, *nous appellerons trièdres symétriques deux trièdres qui auront toutes leurs parties constituantes égales chacune à chacune, mais disposées dans un ordre* INVERSE.

On forme immédiatement le trièdre symétrique d'un trièdre donné en prolongeant les arêtes de celui-ci, et prenant pour ses faces les angles plans opposés par le sommet à celles de ce trièdre. On voit, en effet, que si
Fig. 230. l'on fait faire une demi-révolution à l'angle B'SA' dans son plan et autour de son sommet S, ses côtés S'A' et S'B' viendront s'appliquer respectivement sur SA et SB, mais que les arêtes S'C' et SC resteront de part et d'autre du plan commun.

Soit SC'' la position qu'occupe alors l'arête S'C'. Je dis que les deux arêtes SC et SC'' sont situées dans un plan perpendiculaire à ASB, et sont également inclinées sur ASB. Prenons, en effet, $SC'' = SC$, et joignons CC'' : il suffira de démontrer que le plan ASB est perpendiculaire sur le milieu de CC'' (**478** et **469**). Pour cela, je joins les points C et C'' avec deux points quelconques A et B des arêtes SA et SB, ce qui

forme les triangles égaux CSA et C″SA, CSB et C″SB (**139**) : donc CA = C″A, et CB = C″B ; donc, si l'on joint le milieu O de CC″ avec les points S, A, B, les trois droites SO, AO et BO seront perpendiculaires à CC″ (**60**), et par conséquent détermineront un plan perpendiculaire sur le milieu de CC″ (**432**). Mais ce plan n'est autre que ASB : donc, etc.

On voit par là que les deux trièdres SABC et S″ABC sont *symétriquement* placés de part et d'autre du plan ASB, et voilà pourquoi *Legendre* les a appelés *angles trièdres* SYMÉTRIQUES [1].

On conçoit que deux angles polyèdres quelconques concaves ou convexes S et S′ peuvent avoir toutes leurs faces consécutives égales chacune à chacune, savoir : ASB = A′S′B′, BSC = B′S′C′, CSD = C′S′D′, etc., mais disposées dans un ordre inverse ; et leurs angles dièdres homologues (ceux qui sont compris entre des faces égales), SA et S′A′, SB et S′B′, SC et SC′, etc., égaux. Alors, si l'on place la face A′S′B′, par exemple, sur son égale ASB, en faisant coïncider leurs arêtes homologues, toutes les autres arêtes homologues des deux angles S et S′ seront situées de part et d'autre du plan commun ASB, de sorte que ces deux angles polyèdres ne pourront pas coïncider, bien que toutes leurs parties constituantes soient égales. Nous dirons donc encore qu'ils sont symétriques. Fig. 225.

499. SCHOLIE II. Dans les figures planes il n'y a point, à proprement parler, d'égalité par symétrie : car, comme le dit *Legendre*, toutes celles qu'on voudrait appeler ainsi seraient des égalités absolues ou de superposition. Si l'on abaisse, en effet, de tous les sommets d'un polygone ABCDE, des perpendiculaires Fig. 231.

---

[1] Deux points sont dits symétriques par rapport à une droite ou à un plan, lorsque cette droite ou ce plan est perpendiculaire à la droite qui les unit. Si deux corps sont tels que tous les points de l'un soient les symétriques de ceux de l'autre, on dit que ces corps sont symétriques. Un corps et son image sont symétriques.

sur une droite quelconque XY, tracée dans son plan, qu'on prolonge chacune d'elles d'une quantité égale à elle-même, et que l'on joigne deux à deux leurs extrémités, on formera un polygone A′B′C′D′E′, qui aura ses angles et ses côtés égaux chacun aux angles et aux côtés du polygone ABCDE, et disposés dans un ordre inverse. Cependant il suffira, pour superposer ces deux polygones, de plier la figure le long de XY. Ainsi, ces polygones sont réellement symétriques par rapport à la droite XY, que l'on appelle en conséquence leur *axe de symétrie*; mais ils ne sont pas symétriques dans le sens que nous avons attaché à cette
Fig. 230. expression en parlant des trièdres SABC et S″ABC. C'est qu'en effet on peut prendre indifféremment le dessus pour le dessous d'une figure plane, et *vice versâ*, et qu'il n'en est pas ainsi pour les figures qui réunissent les trois dimensions de l'étendue.

Théorème XVII.

500. *Deux trièdres* S *et* S′ *sont égaux lorsque leurs angles dièdres sont égaux chacun à chacun, et que leurs faces homologues sont semblablement disposées.*

Si l'on construit, en effet, les deux trièdres supplémentaires T et T′ des trièdres S et S′, ils auront leurs faces homologues égales chacune à chacune (**491**), et par conséquent leurs angles dièdres homologues égaux chacun à chacun (**496**) : donc les trièdres S et S′ auront ainsi leurs faces homologues égales et, par hypothèse, semblablement disposées; donc ils sont égaux.

Théorème XVIII.

501. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées.*

Répétez ici la démonstration du n° **497**.

Théorème XIX.

502. *Deux trièdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun, et que leurs faces homologues sont semblablement disposées.*

La démonstration est analogue à celle du n° **497**.

503. Scholie. Si les éléments dont l'égalité constitue celle des deux trièdres, étaient disposés dans un ordre inverse, ces deux trièdres seraient symétriques. On conçoit, en effet, que si l'on construit le symétrique du premier de ces trièdres, il sera égal au second, en vertu de l'un de nos trois derniers théorèmes.

Théorème XX.

504. *Pour qu'avec trois angles plans donnés on puisse construire un angle trièdre, il faut et il suffit que leur somme soit moindre que quatre angles droits, et que le plus grand soit plus petit que la somme des deux autres.*

Ces conditions sont nécessaires, en vertu des théorèmes **493** et **494**; ainsi il s'agit de démontrer qu'elles sont suffisantes.

Traçons sur un plan trois angles C′SA, ASB et C″SB égaux aux trois angles donnés, et supposons que ASB soit le plus grand. Je décris du point S comme centre et avec un rayon arbitraire l'arc C′A′B′C″ : l'arc A′B′ sera plus grand que chacun des arcs C′A′ et C″B′ et plus petit que leur somme ; si donc on abaisse des points C′ et C″ des perpendiculaires C′AM et C″BN sur SA et sur SB, le point M sera situé entre A′ et B′, et le point N entre A′ et M, de sorte que les cordes C′M et C″N se couperont dans l'intérieur de la circonférence. Donc C′A > AO. Par conséquent, si au point O on élève une perpendiculaire OC au plan ASB, et que dans le plan déterminé par cette droite et par AO on décrive un arc de cercle du centre A avec le rayon AC′, cet arc coupera cette perpendiculaire en un Fig. 232.

point C, et je dis qu'en faisant passer des plans par ce point et par les droites SA et SB, on formera un angle trièdre SABC dont les faces seront précisément égales aux trois angles donnés. En effet, les triangles SAC et SAC′ ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, car CA est perpendiculaire sur SA (439); donc l'angle ASC est égal à ASC′ et SC = SC′ = SC″. Il suit de là que les triangles rectangles SBC et SBC″ ont l'hypoténuse égale et un côté égal, et que par conséquent l'angle CSB = C″SB′, ce qui achève de démontrer notre proposition.

505. Théorèmes a démontrer. 1° *Deux plans perpendiculaires à un troisième et passant par deux droites parallèles et qui ne sont pas perpendiculaires à ce troisième plan sont parallèles.*

2° *Le lieu de tous les points équidistants de deux plans donnés est le système des deux plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres formés par ces plans.*

3° *Le lieu de tous les points équidistants des trois faces d'un angle trièdre est la droite suivant laquelle se coupent les plans qui divisent ses trois angles dièdres chacun en deux parties égales.*

4° *Dans un trièdre* isoèdre, *c'est-à-dire qui a deux faces égales, les angles dièdres opposés aux faces égales sont égaux; et réciproquement, si deux angles dièdres d'un trièdre sont égaux, les faces qui leur sont opposées seront égales.*

5° *Dans tout trièdre, le plus grand angle dièdre est opposé à la plus grande face; et réciproquement, la plus grande face est opposée au plus grand angle dièdre.*

LIVRE VII.

DES SURFACES COURBES.

CHAPITRE PREMIER.

DES DIFFÉRENTES ESPÈCES DE SURFACES COURBES, ET DE LEURS PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

506. Si l'on fait mouvoir une *ligne* dans l'espace, il pourra arriver, ou qu'elle conserve sa forme en changeant de position, ou qu'elle varie en même temps de forme et de position. Dans les deux cas, on conçoit que cette ligne engendrera ainsi une surface; car il est clair que *le lieu* de toutes ses positions successives partagera l'espace en deux parties auxquelles il servira de *limite*. La nature de la surface ainsi engendrée dépend donc des lois qui règlent à chaque instant la forme de la ligne mobile que l'on nomme la *génératrice* de la surface et sa position dans l'espace.

On voit donc que *toute surface peut être regardée comme engendrée par le mouvement d'une ligne de forme constante ou variable dans l'espace*, et que cette surface sera complétement déterminée lorsqu'on sera en état de construire, pour un point quelconque, la génératrice suivant la forme et la position qu'elle doit avoir en passant par ce point. On détermine ordinairement les positions successives de la génératrice en l'assujettissant à se mouvoir sur une ou plusieurs lignes fixes que l'on appelle *directrices*.

Ainsi nous avons vu que l'on engendrerait un plan en faisant glisser une ligne droite parallèlement à elle-même le long d'une autre droite (**428**). La première est la génératrice, et la deuxième est la directrice. Ici la forme de la génératrice est constante.

Si l'on fait tourner une ligne *quelconque* CMD autour d'une droite fixe AB, on engendrera une surface que l'on appelle de révolution, et la forme de sa géné- Fig. 233.

ratrice sera encore constante. Mais si l'on observe que dans le mouvement de cette courbe les perpendiculaires abaissées de ces différents points sur *l'axe de révolution* AB décrivent des circonférences qui ont pour centres les points où elles coupent cet axe, on comprendra que l'on pourra encore regarder la surface comme engendrée par une circonférence qui se mouvrait de telle sorte que son centre étant toujours sur la droite AB, et son plan étant toujours perpendiculaire à cette droite, son rayon soit, à chaque instant, égal à la distance des points où son plan coupe les deux lignes AB et CMD données dans l'espace. Alors la courbe génératrice change en même temps de forme et de position.

Théorème I.

507. *Toutes les tangentes*[1] *aux différentes courbes que l'on peut tracer sur une surface par l'un de ses points sont dans un même plan, que l'on appelle en conséquence le* PLAN TANGENT *à la surface en ce point.*

Fig. 234. En effet, soit M un point quelconque d'une surface, AB la forme et la position de la génératrice quand elle passe par ce point, CD une directrice de AB, et GF une autre courbe *quelconque* tracée par le point M sur la surface. Il est clair que si l'on prouve que la tangente à cette dernière courbe au point M est dans le plan déterminé par les tangentes menées aux deux autres courbes AB et CD en ce même point, notre théorème sera démontré.

Pour y parvenir, considérons la génératrice dans une autre position A'B', et soient M' et N' les points où elle coupe CD et FG. Par les trois points M, M' et N' pris deux à deux, menons les sécantes MM', MN' et

---

[1] Si l'on étend à une courbe quelconque la définition que nous avons donnée de la tangente à une circonférence (83), *on appellera* TANGENTE *à une courbe, en un point donné, la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante que l'on fait tourner autour de ce point, jusqu'à ce qu'un second point d'intersection vienne coïncider avec le premier.*

Il suit de là qu'on peut considérer la tangente comme une droite qui passe par deux points *infiniment voisins* sur la courbe ou qui a un *élément* de commun avec elle.

M′N′, qui seront évidemment dans un même plan. Si l'on suppose maintenant que la génératrice A′B′ glisse sur CD, en se rapprochant de AB, elle entraînera dans son mouvement nos trois sécantes, et leur plan tournera en même temps autour de M. Enfin, quand la génératrice sera revenue à la position AB, les points M′ et N′ coïncideront avec le point M, et les trois sécantes mobiles seront devenues tangentes aux trois courbes respectives CD, GF et AB. Mais ces trois sécantes étaient, pour chaque position de la génératrice, toujours dans un même plan : nous devons donc conclure que, quand elles sont devenues tangentes, elles doivent se trouver encore dans un même plan, lequel est la limite des positions successives de celui des trois sécantes.

508. Comme deux droites qui se coupent suffisent pour déterminer un plan, on voit que, *pour mener un plan tangent à une surface en un point donné, il suffira de construire les tangentes à deux lignes tracées sur la surface par ce point, et de faire passer un plan par ces deux droites.*

509. Il suit du théorème précédent que le plan tangent à une surface peut être considéré comme ayant de commun avec elle un *élément superficiel* formé par l'ensemble de tous les *éléments linéaires* qui sont communs aux courbes passant par le point de contact et à leurs tangentes. On pourra donc regarder une surface courbe comme composée d'une infinité de facettes planes infiniment petites que l'on nomme ses éléments.

Il est vrai que l'on substitue ainsi à la surface proposée une *surface polyèdrale* dont les faces sont infiniment petites, mais toute propriété qui, dans une pareille surface, sera vraie quelles que soient la grandeur absolue de ces faces et leurs inclinaisons mutuelles, subsistera lorsque le nombre de ses faces deviendra plus grand et qu'elles diminueront de plus en plus, de sorte que la propriété dont il s'agit aura lieu pareillement lorsque l'on passera à la limite, c'est-à-dire quand on considérera la surface courbe proposée.

* **510**. Les surfaces que l'on emploie le plus fréquemment dans les arts sont celles qui ont pour génératrices la ligne droite et la circonférence.

Parmi ces dernières on distingue spécialement celle qui est produite en faisant tourner une ligne quelconque autour d'un axe fixe, et que nous avons nommée *surface de révolution*. Les plans perpendiculaires à l'axe coupent tous la surface suivant des circonférences dont les centres sont sur cet axe, et qui sont généralement inégales. On les nomme des *parallèles*. Les plans qui passent par l'axe coupent la surface suivant des courbes que l'on appelle *méridiennes* et qui
Fig. 233. sont toutes égales entre elles. Soient, en effet, CMD et CM′D deux méridiennes quelconques et MQ et M′Q, NR et N′R, PS et P′S, . . . les traces de leurs plans sur ceux de différents parallèles. Les angles MQM′, NRN′, PSP′ . . . seront égaux, puisqu'ils correspondent à un même angle dièdre MCDM′, et comme MQ = M′Q, NR = N′R, PS = P′S, ... on voit que si l'on fait tourner le plan CN′D de la quantité angulaire MQM′, tous les points M′, N′, P′. . . viendront se rabattre respectivement sur M, N, P, . . . de sorte que la courbe CM′D recouvrira exactement la courbe CMD.

***511**. Le plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan du méridien sur lequel le point de contact est situé. En effet, la tangente menée par ce point au parallèle sur lequel il se trouve est perpendiculaire à l'intersection de ce parallèle et du méridien (**84**); et, comme ces deux plans sont perpendiculaires entre eux, elle est perpendiculaire au méridien (**479**) : donc le plan tangent lui est perpendiculaire (**478**).

***512**. Il y a deux espèces de surfaces engendrées par une ligne droite : *les surfaces gauches* et *les surfaces développables*. On comprend les unes et les autres sous la dénomination commune de *surfaces réglées*, parce que l'on peut appliquer l'arête d'une règle sur ces surfaces.

***513**. Le caractère distinctif des surfaces gauches consiste en ce que deux génératrices consécutives ne sont jamais dans un même plan, de sorte que *l'élément* (**509**) de la surface compris entre ces deux droites n'est pas plan. C'est un élément courbe qui est *illimité* dans le sens des droites qui le comprennent.

On satisfait très-simplement à cette condition, c'est-

à-dire qu'on engendre une surface gauche en faisant glisser une ligne droite sur trois droites qui, prises deux à deux, ne sont pas parallèles à un même plan, ou bien en faisant mouvoir une ligne droite parallèlement à un plan fixe, de manière qu'elle s'appuie constamment sur deux droites situées dans des plans différents et dont aucune n'est parallèle au plan fixe.

Il est d'abord facile de voir que l'une ou l'autre de ces conditions suffit pour régler le mouvement de la génératrice : car, si, dans le premier cas, on prend un point quelconque M sur la directrice A, et que par ce point et chacune des deux autres directrices B et C on fasse passer des plans, leur intersection MN rencontrera les deux droites B et C : car, si elle était parallèle à toutes deux, tout plan parallèle au plan AMN serait parallèle à nos trois directrices, ce qui est contraire à l'hypothèse. Réciproquement, toute droite qui, menée par le point M, rencontrera les droites B et C, sera dans nos deux plans, et, par conséquence, coïncidera avec MN. Fig. 235.

Pour construire, dans le deuxième cas, la génératrice qui rencontrerait la directrice A en un point quelconque M, menez par ce point un plan parallèle au plan directeur, et joignez le point M avec celui où ce plan auxiliaire rencontrera la deuxième directrice. Ainsi, dans une échelle dont les deux montants ne seraient pas dans un même plan, les échelons, supposés également espacés, seraient les génératrices d'une surface gauche dont ces montants seraient les directrices (**462**).

Remarquons que, dans ces deux modes de génération, deux génératrices quelconques ne peuvent pas se trouver dans un même plan, sans quoi les directrices seraient aussi situées dans ce plan, ce qui ne se peut.

* **514**. Les surfaces gauches qui ont pour directrices des lignes droites, jouissent d'une propriété très-remarquable dont on trouvera la démonstration synthé-

17

tique dans *la Géométrie descriptive* de M. *Leroy*, celle de pouvoir être engendrées par une droite de deux manières différentes. Ainsi, que parmi toutes les droites qui s'appuient sur les trois directrices A, B, C, on en choisisse trois à volonté A′, B′, C′, et que l'on fasse mouvoir une ligne droite sur ces trois dernières : elle engendrera encore la même surface. D'où il suit, comme l'observe *Monge*, que cette surface pourrait s'exécuter comme un tissu. Les fils de la chaîne seraient toutes les génératrices de l'un des modes de génération, et ceux de la trame seraient les génératrices de l'autre.

* **515**. Si une droite se meut de manière que, dans deux positions consécutives, elle se trouve dans un même plan, elle engendrera une SURFACE DÉVELOPPABLE, *c'est-à-dire une surface dont tous les éléments pourront être réunis dans un seul et même plan* SANS DÉCHIRURE NI DUPLICATURE. En effet, si l'on fait tourner chaque élément avec la portion de surface qui lui est adjacente autour de la droite qui le sépare de l'élément précédent, on pourra amener le deuxième élément sur le plan du premier, le troisième sur ce même plan, et ainsi de suite, de sorte que la surface tout entière viendra s'étendre sur le plan sans rupture ni duplicature.

* **516**. Si l'on considère une *courbe à double courbure*, c'est-à-dire telle que trois éléments consécutifs de cette courbe ne soient pas dans un même plan, comme une brisée d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et qu'on prolonge indéfiniment chacun de ses éléments, on formera évidemment une surface développable : car deux de ces droites consécutives sont dans un même plan. Ainsi, l'on engendrera une surface développable en faisant glisser une ligne droite sur une courbe à double courbure de manière qu'elle lui soit constamment *tangente* [**507**, (1)]. La surface est ainsi composée de deux *nappes* indéfinies séparées par la

courbe directrice, que Monge a nommée *l'arête de rebroussement* de la surface.

* **517**. Il suit du nº **507** que le plan tangent à une surface réglée en un point donné, doit contenir la génératrice qui passe par ce point : car cette droite est elle-même sa propre tangente. Par conséquent, pour construire le plan tangent à une surface gauche en un point donné, il suffira de mener un plan par les deux génératrices qui passent par ce point (**514**); et, comme deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan (**515**), on voit que les plans tangents menés à une surface gauche en deux points différents d'une même génératrice, sont différents; de sorte que le plan tangent à une pareille surface *coupe* cette surface partout ailleurs qu'au point de contact.

* **518**. Au contraire, le plan tangent à une surface développable en un point donné est tangent à cette surface dans tous les points de la génératrice qui passe par ce point. En effet, si l'on trace par le point de contact une courbe quelconque sur la surface, il est clair que la tangente à cette courbe en ce point, aura un élément dans le plan de la génératrice dont il s'agit et de la suivante : donc elle y sera tout entière; donc ce plan sera bien un plan tangent à tous les points de cette génératrice.

519. On appelle *normale* la perpendiculaire au plan tangent menée par le point de contact.

CHAPITRE II.

DES SURFACES CONIQUES.

520. On appelle surface conique une surface en- **Fig. 236.**
gendrée par une droite indéfinie A A′ qui glisse sur une courbe donnée A M B, en tournant autour d'un point fixe S. Cette courbe et cette droite sont respectivement

la *directrice* et la *génératrice* de la surface. Le point fixe S en est le centre (**180**) : car on conçoit que si l'on prend de part et d'autre de ce point S deux distances égales SK, SK′ sur la même génératrice, et que par les points K et K′ on mène deux plans parallèles quelconques, le point S divisera en deux parties égales les portions de toutes les autres génératrices comprises entre ces deux plans.

On voit que la surface conique est composée de deux *nappes* qui sont engendrées respectivement par les parties indéfinies SA et SA′ de la génératrice AA′.

521. Lorsque la directrice a un centre, la droite indéfinie menée par ce centre et celui de la surface conique se nomme l'*axe* de cette surface.

522. L'espace terminé d'une part par l'une des nappes d'une surface conique, et de l'autre par un plan quelconque, a reçu le nom de *cône*. La portion de ce plan interceptée par la surface conique est la *base* du cône, le centre S en est dit le *sommet*, et la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur le plan de la base est la *hauteur* du cône; enfin l'axe de la surface conique est aussi l'*axe* du cône.

523. Le cône est *droit* ou *oblique*, suivant que son axe est perpendiculaire ou oblique au plan de sa base, et l'on dit qu'il est *circulaire* quand sa base est un cercle.

524. *Un cône circulaire droit peut être regardé comme provenant de la révolution d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit :*
Fig. 237. car, dans le mouvement du triangle rectangle ASO autour de SO, le côté AO décrit un cercle qui a pour centre le point O; la droite SA glisse donc sur la circonférence de ce cercle, en tournant autour du point A, de sorte qu'elle engendre une nappe d'une surface conique.

Si donc *on fait tourner un angle qui n'est pas droit autour d'un de ses côtés, le côté mobile engen-*

drera une nappe d'une surface conique circulaire droite.

325. La portion d'un cône comprise entre deux plans parallèles se nomme *un tronc de cône à bases parallèles*. La hauteur de ce tronc est la distance des deux plans, et la portion de génératrice qu'ils interceptent en est dite l'arête ou la génératrice.

Il est évident qu'un tronc de cône droit à bases parallèles est engendré par un trapèze rectangle, tournant autour du côté qui est perpendiculaire à ses deux bases parallèles.

Théorème I.

326. *Tout plan mené dans une surface conique par une de ses génératrices et un point quelconque de la directrice, la coupe suivant deux ou un plus grand nombre de génératrices.*

Il est clair, en effet, que les génératrices qui passent par les points où le plan dont il s'agit coupe la directrice, ont chacune deux points dans ce plan, et y sont par conséquent tout entières : elles sont donc les intersections de ce plan avec la surface conique.

Théorème II.

327. *Le plan conduit par une génératrice* SA *et la tangente* AT *menée par sa trace à la base d'un cône, renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on pourra tracer sur le cône par les différents points de cette génératrice, de sorte que ce sera le plan tangent au cône en l'un quelconque des points de* SA. Fig. 236.

On démontrera ce théorème en faisant voir que le plan SAT contient la tangente KV à une courbe quelconque KL tracée sur la surface conique. Pour cela, je mène un plan par la génératrice SA, et un point M voisin de A : il coupera la surface conique suivant la droite SM et la courbe KL en un certain point N de celle-ci. Maintenant, si l'on fait tourner ce plan autour

de SA, de manière que le point M se rapproche de A, les sécantes AM et KN tourneront en même temps autour de A et de K; et quand la droite variable SM, qui contient les points M et N, coïncidera avec SA, les sécantes AM et KN seront devenues les tangentes respectives AT et KV; mais le plan mobile aura pris alors la position SAT; et, comme les deux sécantes sont toujours restées dans ce plan, on voit ainsi que la tangente KV est aussi dans le plan SAT. De plus, ce plan est tangent à la surface conique (**508**): donc, etc.

* **528**. Scholie. Remarquons que si le point par lequel on veut mener un plan tangent à une surface conique était le centre même de cette surface, le problème serait impossible : car les diverses génératrices y sont elles-mêmes leurs propres tangentes, et cependant elles sont deux à deux dans des plans différents.

Remarquons aussi que la démonstration du n° **507** n'est pas applicable au centre de la surface conique : car la génératrice parallèle à la base du cône se resserre de plus en plus en approchant de ce centre, et finit par se réduire à un point : alors elle n'admet plus, à proprement parler, de tangente.

Il en est de même pour les surfaces de révolution dont le méridien coupe l'axe sous un angle nul ou différent d'un droit : en ces points de section il n'y a point de plan tangent.

Théorème III.

529. *Une surface conique est toujours développable.*

Pour le démontrer, je suppose que l'on inscrive un polygone dans la courbe qui résulte de l'intersection de la surface conique par un plan, puis que l'on fasse passer des plans par les côtés opposés de ce polygone et par le centre de la surface. Nous formerons ainsi un angle polyèdre, et l'on verra facilement que l'on pourra
Fig. 238. faire tourner SBC autour de l'arête SB jusqu'à ce

qu'elle vienne se placer dans le plan de la face SAB, et à la suite de celle-ci, puis faire tourner le système de ces deux faces autour de l'arête SC jusqu'à ce qu'il soit venu se rabattre sur le plan de la face suivante SBC et ainsi de suite; donc toute la surface de cet angle polyèdre pourra être étendue sur un même plan, et les côtés du polygone ABCD... ainsi que les portions SA, SB, SC... des arêtes comprises entre le centre S de la surface et le plan sécant auront conservé leurs longueurs, de sorte que le développement sera un secteur polygonal.

Or, ces conséquences sont vraies quelle que soit la grandeur des angles et des côtés du polygone que nous avons substitué à la base du cône, donc elles le seront encore quand tous les côtés de ce polygone seront infiniment petits, c'est-à-dire quand l'angle polyèdre S aura atteint sa limite, qui est la surface conique proposée.

530. Comme toutes les génératrices d'un cône droit sont égales, on voit que si l'on conçoit sa surface fendue le long d'une de ces génératrices et qu'on l'étende sur un plan, le développement de cette surface sera un secteur S'A'MB' dont le rayon S'A' sera égal Fig. 237.
à cette génératrice, et dont la base A'B' aura même longueur que la circonférence de la base du cône, de sorte que, pour déterminer le nombre de degrés de cette base A'B', on posera la proportion [1]

$$AO : SA :: x : 360^\circ.$$

Si, par exemple, AO et SA valaient respectivement $6^{c.m}$ et $10^{c.m}$, on trouverait que $x = 216^\circ$. Ainsi, en faisant un angle de 216°, et décrivant entre ses côtés un arc dont le rayon eût 10 centimètres, on aurait le développement du cône donné.

---

[1] On a évidemment : A'MB' : *circ.* S'A' :: x : 360°, en appelant x le nombre de degrés de l'arc A'MB'; mais A'MB' = *circ.* AO : donc AO : SA :: x : 360°.

CHAPITRE III.

DES SURFACES CYLINDRIQUES.

Fig. 239. **531.** *On appelle* SURFACE CYLINDRIQUE *une surface engendrée par une droite indéfinie* AA', *qui glisse sur une courbe donnée* CMB, *en restant constamment parallèle à elle-même.* Cette courbe et cette droite sont respectivement la *directrice* et la *génératrice* de la surface.

532. Lorsque la directrice a un centre, la parallèle menée par ce point aux génératrices se nomme l'*axe* de la surface cylindrique.

533. *L'espace compris entre deux plans parallèles et une surface cylindrique a reçu le nom de* CYLINDRE. Les aires des sections faites sur ces plans par la surface cylindrique sont les *bases* du cylindre, et la distance des deux bases est sa *hauteur;* enfin l'axe de la surface est aussi l'*axe* du cylindre.

534. Le cylindre est *droit* ou *oblique*, suivant que la génératrice de sa surface convexe est perpendiculaire ou oblique aux plans de ses bases, et l'on dit qu'il est *circulaire* quand ses bases sont des cercles.

535. Il suit des définitions des n[os] **520** et **531** qu'une surface cylindrique peut être considérée comme une surface conique dont le centre est situé à l'infini ; car alors toutes les génératrices de celles-ci deviennent parallèles. Par conséquent la surface cylindrique jouira de toutes les propriétés de la surface conique qui seront indépendantes de l'éloignement du centre de cette surface.

536. D'après cela *un cylindre pourra être regardé comme un tronc de cône à bases parallèles, dont le sommet est infiniment éloigné.* Donc *le cylindre circulaire droit est engendré par la révolution d'un rectangle autour d'un de ses côtés.*

537. *Toute surface cylindrique est développable* (**515**) ou (**529**), et son développement, si elle est droite, sera un rectangle dont la hauteur sera celle même du cylindre, et dont les bases seront égales en longueur aux périmètres de ses bases (**530**). Rien ne sera donc plus facile que de construire le développement de la surface convexe d'un cylindre droit.

538. *Tout plan conduit par une génératrice et un point quelconque de la directrice coupe la surface cylindrique suivant deux ou un plus grand nombre de génératrices* (**526**).

539. *Tout plan conduit par une génératrice et par la tangente au point où elle perce la base du cylindre, renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on pourra tracer sur le cylindre par les différents points de cette génératrice, de sorte que ce plan touchera le cylindre en tous les points de cette génératrice* (**527**).

CHAPITRE IV.

DE LA SURFACE SPHÉRIQUE.

540. LA SURFACE SPHÉRIQUE *est celle dont tous les points sont également distants d'un point que l'on nomme* CENTRE, *et l'espace enveloppé par cette surface s'appelle* SPHÈRE.

Les droites qui vont du centre à la surface se nomment *rayons;* et toute droite qui, passant par le centre, va se terminer à la surface, est un *diamètre.*

Tous les rayons sont égaux; il en est de même des diamètres.

541. Il suit évidemment de cette définition que *la surface sphérique est engendrée par la révolution d'une demi-circonférence autour de son diamètre.*

542. *On appelle* CALOTTE *la portion de la surface sphérique détachée par un plan.* La calotte est engen-

Fig. 240. drée par un arc AC qui tourne autour d'un diamètre CD mené par une de ses extrémités. La circonférence décrite par l'autre extrémité A de l'arc est la *base* de la calotte, et la projection CI de l'arc générateur sur l'axe en est la *hauteur*.

543. *L'espace compris entre la calotte et le plan de sa base se nomme* SEGMENT *sphérique.*

544. *Une* ZONE *est une portion de la surface sphérique comprise entre deux plans parallèles.* Elle est engendrée par un arc AF qui tourne autour d'un diamètre CD qui ne rencontre pas cet arc. Les circonférences décrites par les extrémités de cet arc sont les bases de la zone, et sa projection sur l'axe en est la *hauteur.*

545. *L'espace compris entre une zone et les plans qui la déterminent est ce qu'on nomme une* TRANCHE *sphérique.*

546. *Un* FUSEAU *est la portion* CGDNC *de la surface sphérique comprise entre les faces d'un angle dièdre dont l'arête passe par le centre de la sphère; et la partie de la sphère comprise entre le fuseau et les faces de cet angle dièdre est un* ONGLET.

547. *Un* SECTEUR *sphérique est le corps engendré par un secteur circulaire* AOC *qui tourne autour de l'un des rayons qui le limitent*, de sorte qu'il se compose d'un cône et d'un segment adossés par leur base commune.

Théorème I.

Fig. 241. **548.** *Quatre points* A, B, C, D, *qui ne sont pas situés dans un même plan, déterminent une sphère.*

Soient F et G les centres respectifs des deux circonférences que l'on ferait passer par les points A, B, C, et C, D, A. Élevons en ces points les perpendiculaires FI et GK aux plans de ces circonférences, et je dis qu'elles se couperont. Si nous abaissons, en effet, des perpendiculaires des points F et G sur AC, elles iront concourir au milieu M de cette droite (**81**), et déter-

mineront un plan perpendiculaire à AC (451), et partant aux plans ABC et ACD (478): donc les perpendiculaires FI et GK à ces plans respectifs seront dans le plan FMG (480); donc elles se couperont, sans quoi FM, qui est perpendiculaire sur FI, le serait aussi à sa parallèle GK. Mais MG l'est déjà sur cette droite; donc on aurait du point M deux perpendiculaires MF et MG sur la même droite GK, ce qui est absurde, à moins que MF et MG ne coïncident. Mais alors les plans ABC et ADC auraient deux droites communes FMG et AC, et ainsi n'en feraient qu'un seul, ce qui est contre l'hypothèse; donc les droites FI et GK se coupent en un certain point O. Ce point, comme appartenant à la première, est équidistant des trois points A, B, C; il est aussi également distant des points A, C, D, puisqu'il se trouve sur la seconde; donc il est à la fois équidistant des quatre points A, B, C, D. Donc la surface sphérique décrite du point O comme centre avec le rayon OA passera nécessairement par ces quatre points. Donc par quatre points qui ne sont pas situés dans un même plan, on peut toujours décrire une surface sphérique.

Je dis maintenant que l'on ne pourra en faire passer qu'une seule. Imaginons, en effet, une seconde surface sphérique par les quatre points A, B, C, D. Son centre sera nécessairement sur la perpendiculaire FI, sans quoi, le pied de la perpendiculaire abaissée de ce centre sur le plan ABC étant différent du point F, ce centre ne serait pas équidistant des trois points A, B, C. Par la même raison, il se trouvera aussi sur la perpendiculaire GK, et coïncidera, par conséquent, avec le point O. Les deux surfaces sphériques auront donc le même centre et le même rayon, et par conséquent n'en feront qu'une.

549. Scholie. Si les quatre points A, B, C, D, sont dans un même plan, les deux perpendiculaires FI et GK seront parallèles; et, comme le centre de la surface sphérique qui passe par ces quatre points doit être sur chacune d'elles, ainsi que nous venons de le prou-

ver, on voit qu'il sera impossible de décrire une pareille surface par les quatre points A, B, C, D, à moins que FI et GK ne coïncident, ce qui exige que les quatre points se trouvent sur une même circonférence; et, en effet, tous les points de la perpendiculaire élevée par son centre sur son plan en sont équidistants.

Théorème II.

Fig. 240. **550**. *Toute section* AMB, *faite dans une surface sphérique par un plan, est une circonférence de cercle; et si du centre* O *de la surface on abaisse une perpendiculaire* OI *sur ce plan, elle passera par le centre de la circonférence, et percera*, par conséquent, *la surface en deux points* C *et* D, *dont chacun sera également éloigné de tous les points de cette circonférence, et que l'on appelle ses* pôles.

En effet, si l'on mène des rayons à tous les points de la courbe d'intersection AMB, ces rayons seront des obliques égales sur le plan de cette courbe, et, par conséquent, tous ces points seront équidistants du pied de la perpendiculaire OI : donc AMB est une circonférence dont I est le centre; donc les points C et D sont chacun également éloignés de tous les points de cette circonférence.

551. Corollaire. Si l'on observe que dans le triangle rectangle OIM on a :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IM}^2,$$

on verra que, la somme des carrés des deux droites OI et IM étant constante, si l'une de ces lignes augmente ou diminue, l'autre diminue ou augmente en même temps; d'où il suit :

1° Qu'un cercle de la sphère est d'autant plus grand ou plus petit que son plan passe plus près ou plus loin du centre de ce corps;

2° Que, quand il passe par ce point, il a le même centre et le même rayon que la *sphère*. C'est là son *maximum* : car la distance OI est alors *minimum*.

De là la distinction des cercles de la sphère en *grands* et en *petits cercles*. On *appelle grand cercle celui dont le plan passe par le centre de la sphère, et petit cercle celui dont le plan n'y passe point ;*

3° Que *deux petits cercles égaux sont équidistants du centre de la sphère, et réciproquement ; et que de deux cercles inégaux le plus grand est le plus près du centre, et réciproquement.*

332. Il suit de la définition des grands cercles de la sphère,

1° *Que tous les grands cercles sont égaux ;*

2° *Que deux grands cercles se coupent en deux parties égales* : car leur ligne d'intersection est un diamètre commun à tous deux, puisqu'elle passe par le centre de la sphère ;

3° *Que par deux points donnés sur une surface sphérique, on peut toujours faire passer un arc de grand cercle, mais que l'on ne peut en faire passer qu'un seul,* puisque les deux points donnés et le centre de la sphère déterminent un plan. Cependant, si les deux points donnés étaient les extrémités d'un diamètre, on pourrait les joindre par une infinité d'arcs de grands cercles, puisque, par une même droite, on peut conduire une infinité de plans.

4° *Tout grand cercle divise la sphère et sa surface en deux parties égales qu'on nomme* HÉMISPHÈRE : car, si après avoir renversé l'une des deux parties, on la place sur l'autre, en faisant coïncider leurs bases, les surfaces qui les terminent devront se recouvrir exactement, sans quoi tous leurs points ne seraient plus à la même distance du centre.

333. Scholie i. *La perpendiculaire abaissée du centre d'une sphère sur un plan sécant quelconque satisfait aux cinq conditions suivantes : 1° passer par le centre de la sphère ; 2° être perpendiculaire au plan sécant ; 3° passer par le centre du cercle d'intersection ; 4° et 5° passer par chaque pôle de ce cercle.* Comme deux quelconques de ces conditions suf-

fisent pour déterminer une ligne droite, il en résulte que *toute droite qui satisfera à ces deux conditions satisfera en même temps aux trois autres* (**82**).

554. Scholie II. *Si l'on joint un pôle d'un cercle avec les différents points de sa circonférence par des arcs de grand cercle, tous ces arcs seront égaux* comme sous-tendus par des cordes égales, et de plus ils seront perpendiculaires à la circonférence (**478**) : car, on dit qu'un arc est perpendiculaire sur un autre quand leurs plans se coupent à angles droits (on verra plus tard (**556**) la raison de cette dénomination).

L'arc de grand cercle CN *qui va d'un pôle d'un grand cercle* FNG *à sa circonférence, est un* QUADRAN (désormais nous emploierons ce mot pour désigner le quart d'une circonférence de grand cercle); car, l'arc CN est compris entre les côtés d'un angle droit CON, et décrit son sommet O comme centre.

Théorème III.

555. *Si l'on fait tourner un* COMPAS SPHÉRIQUE (on appelle ainsi un compas à pointes recourbées) *autour d'une de ses pointes fixée en* C, *sur la sphère, l'autre pointe, en glissant sur sa surface, y décrira une circonférence dont la pointe fixe occupe un des pôles.*

Menons, en effet, le rayon OC et joignons le centre O avec tous les points A, M, B.... de la courbe décrite. Les droites CA, CM, CB.... sont toutes égales par construction; donc les triangles CAO, CMO, CBO.... sont équilatéraux entre eux; donc les perpendiculaires abaissées de leurs sommets A, M, B.... sur la base commune CO iront la couper au même point I, et détermineront ainsi un plan perpendiculaire au rayon CO. La courbe AMB est donc bien une circonférence dont C est un des pôles.

Remarquons que, si l'ouverture du compas sphérique est égale à la corde qui sous-tend un quadran, les angles AOC, MOC, BOC.... seront droits et

qu'ainsi tous les rayons AO, MO, CO.... étant perpendiculaires à OC, tous les points de la courbe AMB seront dans un plan passant par O, de sorte que cette courbe est une circonférence de grand cercle.

536. Une courbe pouvant être considérée comme une ligne brisée dont les côtés sont infiniment petits, puisqu'on peut regarder la tangente à cette courbe comme ayant un élément de commun avec elle [**507**, (1)] on voit que la mesure naturelle de l'inclinaison de deux courbes qui se coupent est l'angle formé par les deux éléments qui correspondent à leur point d'intersection, c'est-à-dire par les tangentes menées à chaque courbe en ce point. Nous dirons donc que l'*angle formé par deux courbes qui se coupent est celui même que forment les tangentes à leur point de section*.

Ainsi, *l'angle formé par les deux arcs de grand cercle* CGD *et* CND *est précisément l'angle* SCT Fig. 240.
formé par les tangentes CT *et* CS. Or, cet angle est la mesure de l'angle dièdre GCDN que font leurs plans; donc on peut prendre l'un pour l'autre. C'est dans ce sens que l'on dit que *l'angle de deux arcs de grand cercle est l'angle dièdre que font leurs plans*.

Si du point C comme pôle, et avec une ouverture de compas égale à la corde d'un quadran, on décrit l'arc GN entre les côtés de l'angle sphérique C, et que l'on tire les rayons ON et OG, on formera un angle NOG, qui aura pour mesure l'arc GN. Mais cet angle est égal à SCT (**458**); donc *l'angle formé par deux arcs de grand cercle a pour mesure l'arc compris entre eux, et décrit de son sommet comme pôle*.

Théorème IV.

537. *Le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon mené au point de contact*.

En effet, on peut le regarder comme déterminé par les tangentes CS et CT à deux circonférences de grand cercle tracées par le point C; or, ces deux tangentes sont perpendiculaires au rayon CO (**84**) : donc le plan tangent est lui-même perpendiculaire à CO.

On démontrerait, comme au nº **85**, que le plan tangent à une sphère n'a qu'un point commun avec sa surface.

Théorème V.

558. Réciproquement, *tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *est tangent à la sphère*.

Car, si par le rayon OC on mène deux plans quelconques, leurs traces sur le plan donné seront tangentes aux grands cercles suivant lesquels ils coupent la sphère : donc le plan tangent coïncide avec le plan dont il s'agit.

On démontrerait, comme au nº **88**, que tout plan qui n'a qu'un point commun avec une sphère lui est tangent.

Théorème VI.

559. *L'intersection de deux sphères est un cercle, et la droite qui joint les centres est perpendiculaire au plan de ce cercle, et passe par son centre.*

En effet, si l'on joint chaque point de la courbe d'intersection avec les centres des deux sphères, on formera une infinité de triangles isocèles équilatéraux entre eux : donc les perpendiculaires abaissées de leurs différents sommets sur leur base commune, c'est-à-dire sur la droite qui joint les centres, seront égales, et iront la couper au même point ; elles formeront donc un cercle dont le centre est sur cette droite, et dont le plan lui est perpendiculaire.

Théorème VII.

560. *Pour que deux sphères se touchent, il faut et il suffit que la distance des centres soit égale à la somme ou à la différence de leurs rayons.*

Voyez les démonstrations des nºˢ **98**, **99**, **100** et **101**.

Théorème VIII.

561. *Pour que deux sphères se coupent, il faut et il suffit que la distance des centres soit plus pe-*

tite que la somme de leurs rayons, et plus grande que leur différence.

Voyez la démonstration du n° **103**.

362. *On appelle* TRIANGLE SPHÉRIQUE *la portion de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grand cercle moindres chacun qu'une demi-circonférence* (¹); *telle est la figure* ABC. Les plans de ces grands cercles forment un angle trièdre dont le sommet est au centre de la sphère, et dont les faces et les angles dièdres ont pour mesures respectives les côtés et les angles correspondants de ce triangle. Ainsi, *la théorie des triangles sphériques se ramène immédiatement à celle des angles trièdres.* De cette remarque découlent, comme conséquences directes, les propositions suivantes : Fig. 242.

Théorème IX.

363. *Dans tout triangle sphérique un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

Car, une face quelconque d'un angle trièdre étant plus petite que la somme des deux autres (**493**), on voit que sa mesure est plus petite que la somme des mesures de ces deux autres.

(¹) Il existe cependant des triangles sphériques dont les côtés sont plus grands qu'une demi-circonférence de grand cercle : car, si l'on achève la circonférence dont AB fait partie, et que de l'hémisphère CABD on retranche le triangle ABC, dont les trois côtés sont supposés satisfaire à la définition, la portion restante ADBC, comprise entre les trois arcs de grand cercle ADB, AC et BC, sera ainsi un triangle sphérique; mais le côté ADB est plus grand qu'une demi-circonférence. Toutefois on voit que, si l'on connaissait les angles et les côtés du triangle ABC, on aurait immédiatement les angles et les côtés du triangle ADBC. C'est pour cela que l'on a exclu de la définition des triangles sphériques ceux qui sont tels que celui-ci. Fig. 242.

Théorème X.

564. *Dans tout triangle sphérique la somme des trois côtés est plus petite que la circonférence d'un grand cercle.*

Car, la somme des trois faces d'un trièdre étant moindre que quatre droits (**494**), la somme de leurs mesures est moindre que la mesure de quatre droits, c'est-à-dire que la circonférence d'un grand cercle.

Théorème XI.

565. *La somme des angles de tout triangle sphérique est plus grande que deux droits, et plus petite que six droits* (**495**).

566. Scholie. La somme des angles d'un triangle sphérique n'est pas constante comme celle des angles d'un triangle rectiligne; ainsi deux angles donnés ne déterminent pas le troisième, et un triangle sphérique peut avoir deux ou trois angles droits ou obtus.

Théorème XII.

567 *Deux triangles sphériques appartenant à la même sphère ou à des sphères égales sont égaux dans quatre cas, savoir :*

1° *Lorsque leurs côtés sont égaux chacun à chacun;*

2° *Lorsque leurs angles sont égaux chacun à chacun;*

3° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun;*

4° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun;*

Et qu'en outre leurs parties homologues sont semblablement disposées.

On conçoit, en effet, que les angles trièdres correspondants à ces deux triangles étant superposables, ces triangles le seront aussi.

568. Scholie. Si les éléments dont l'égalité con-

stitue celle des deux triangles sont disposés dans un ordre inverse, ces deux triangles auront encore toutes leurs parties homologues égales; mais, comme ils ne sont plus superposables, on dit qu'ils sont *symétriques*.

Théorème XIII.

569. *Si des sommets d'un triangle sphérique* ABC *comme pôles, on décrit trois arcs de grand* Fig. 243.
cercle, on formera un nouveau triangle sphérique A'B'C', *dont les côtés seront les suppléments des angles du premier et dont les angles seront les suppléments des côtés de ce premier triangle* (1).

O étant le centre de la sphère, on voit que puisque par construction les distantes de B' à A et à C sont égales à un quadran, les angles B'OA et B'OC sont droits, et qu'ainsi OB' est perpendiculaire au plan du cercle AC; par la même raison, OA' et OC' le sont aux plans respectifs des cercles BC et AB; donc l'angle trièdre OB'A'C' est le supplémentaire de OBAC.

570. Scholie. Il est bon toutefois d'observer que cet angle trièdre a ses arêtes dirigées en sens contraires de celles du trièdre S' de la figure 227 par rapport à S, et qu'ainsi il est le symétrique du supplémentaire de OABC.

Remarquons encore que les sommets A', B', C' sont les pôles des côtés BC, AC et AB. En conséquence, les triangles ABC et A'B'C' sont appelés *triangles polaires*.

Théorème XIV.

571. *La ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface d'une sphère d'un point* A *à un* Fig. 244.
autre B, *est l'arc de grand cercle qui les unit.*

Supposons que la ligne la plus courte que l'on puisse

---

(1) Le triangle A'B'C' se distingue des triangles que forment les arcs qu'on a décrits en ce que les sommets A et A' sont du même côté de BC, B et B' du même côté de AC, et C et C' du même côté de AB.

tirer sur la sphère du point A au point B soit une certaine ligne ACDEB différente de l'arc de grand cercle AMB. Prenons sur cette ligne un point quelconque D, et, ayant joint le point B au centre O de la sphère, faisons tourner le plan DBO autour de OB : il est clair que, comme tout est symétrique sur la surface de la sphère par rapport au point B, la ligne DM décrite par le point D aura tous ses points équidistants de B. Si donc ANMPB est le plus court chemin pour aller sur la sphère du point A au point B, en passant par le point M, on aura $DEB = MPB$, et par conséquent

$$ACD < ANM \ldots\ldots (1):$$

car, par hypothèse, ACDEB est une ligne plus courte que ANMPB. Or, si l'on joint le point D avec les points A et B par des arcs de grand cercle, le côté AB du triangle sphérique ABD sera plus petit que la somme des deux autres AD et DB : donc, en retranchant d'une part MB, et de l'autre son égale DB, il restera $AD > AM$ [1]. Par conséquent, si l'on fait tourner le plan MAO autour du rayon AO, le point M décrira une courbe à laquelle le point D sera extérieur : donc ce point D est plus éloigné du point A que le point M, ce qui est contraire à l'inégalité (1). On ne pouvait donc pas supposer qu'il y eût du point A au point B une ligne plus courte que l'arc de grand cercle AMB : donc cet arc est le plus court chemin pour aller du point A au point B [2].

---

[1] Ceci suppose que le point M est entre A et B ; or, s'il n'en était pas ainsi, on n'aurait qu'à faire tourner le plan ABO autour du rayon BO, et la courbe décrite par le point A serait enveloppée par celle que le point D a tracée : d'où il s'ensuivrait que le point A serait plus près de B que ne l'est le point D, ce qui est contre l'hypothèse.

[2] On peut encore démontrer ce théorème de la manière suivante :

Fig. 245. Soit AMB la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur

Problème I.

372. *Une sphère étant donnée, trouver son rayon.*

Marquons sur la surface sphérique trois points A, B, C, à égale distance d'un point quelconque P de cette surface. Le plan déterminé par ces trois points coupera la sphère suivant un cercle dont P sera le pôle. Soit D son centre, AD sera son rayon. Nous obtiendrons ce rayon en construisant un triangle A′B′C′ dont les trois côtés soient égaux aux trois distances respec- Fig. 246.

---

la sphère du point A au point B. Je dis d'abord que, si l'on prend deux autres points quelconques N et P sur cette courbe, la ligne NMP sera aussi la plus courte que l'on puisse tirer du point N au point P : car, s'il n'en était pas ainsi, et que NQP fût le plus court chemin de N à P, il est clair que ANQPB serait plus petit que AMB, ce qui est contre l'hypothèse. Or cela est vrai quelle que soit la longueur de l'arc NMP : ainsi il s'agit de déterminer quelle doit être la forme de la courbe AMB, pour que la somme de deux quelconques de ses éléments consécutifs soit la plus petite possible. Soient donc NM et MP deux de ses éléments. Menons aux points N et P deux plans tangents à la sphère : les éléments NM et MP seront tout entiers dans ces plans (309), qui se couperont suivant une certaine droite RMS. Alors, s'ils ne sont pas perpendiculaires à cette droite, on pourra abaisser des points N et P des perpendiculaires sur RS. Supposons que le pied Q de la première soit plus près de M que celui de la seconde, et joignons QP; nous aurons :

$$NQ + QP < NM + MP.$$

Mais, si MN et MP étaient perpendiculaires à RS, on aurait, au contraire :

$$NQ + QP > NM + MP,$$

Q étant toujours un point infiniment près de M. Donc *la propriété du* MINIMUM *appartient aux deux éléments* qui sont perpendiculaires à l'intersection de deux plans tangents consécutifs, ou, autrement, aux deux éléments *dont le plan est perpendiculaire au plan tangent mené à leur point commun :* car cette intersection est dans ce plan. Or le rayon qui va au point M, étant perpendiculaire au plan tangent, est dans le plan des deux éléments NM et MP, lequel passe en conséquence par le cen-

tives AB, AC et BC, et circonscrivant une circonférence à ce triangle : car il est clair que ce cercle et celui déterminé par les trois points A, B, C, sont superposables. Nous connaîtrons donc actuellement l'hypoténuse AP et la base AD du triangle rectangle APD : ainsi il sera facile de construire le triangle A′P′D′ égal à APD, ce qui déterminera l'angle P. Mais, si dans le plan APO nous concevons une perpendiculaire sur le milieu de AP, elle ira passer par le centre O de la sphère, et l'on aura un triangle rectangle PFO, dont nous connaissons l'angle P et le côté PF, moitié de AP. Ainsi, en élevant une perpendiculaire F′O′ sur le milieu de P′A′, nous formerons le triangle rectangle P′F′O′ égal à PFO : donc P′O′ = PO; donc P′O′ est le rayon de la sphère.

Si l'on élève au point O′ une perpendiculaire O′Q′ = O′P′ sur O′P′, la distance P′Q′ sera l'ouverture qu'il faudra donner au compas sphérique pour décrire des grands cercles sur la sphère.

---

tre de la sphère : ainsi le plan de deux éléments consécutifs de la ligne AMB a de commun avec celui déterminé par l'un de ces éléments et le suivant, une droite et un point ; donc tous les points de cette courbe sont dans un même plan qui passe par le centre de la sphère ; donc AMB est un arc de grand cercle.

Nous venons de voir que la propriété du minimum appartient aux deux éléments dont le plan est perpendiculaire au plan tangent mené à leur point commun : le plan de ces éléments est donc normal à la surface. De là ce théorème remarquable :

La ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface entre deux points donnés est celle qui jouit de cette propriété que le plan de deux éléments consécutifs quelconques, est normal à cette surface.

PROBLÈME II.

373. *Décrire une circonférence de grand cercle qui passe par deux points donnés* N *et* G *sur la surface d'une sphère.*

Il ne s'agit évidemment que de chercher un pôle de la circonférence demandée. Or, ce pôle est distant d'un quadran de chacun des deux points donnés : donc, si des points N et G comme pôles, et avec une ouverture de compas sphérique égale à la corde d'un quadran, nous décrivons deux circonférences, leurs points d'intersection C et D seront les pôles de la circonférence demandée, que l'on décrira en faisant tourner le compas autour d'une de ses pointes fixée en C ou en D. Fig. 240.

PROBLÈME III.

374. *Mener par un point donné un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc de grand cercle donné* NG.

On coupera cet arc prolongé, s'il est nécessaire (**373**), par un autre décrit du point donné comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde d'un quadran, et le point de section sera le pôle de l'arc demandé, qu'il sera alors facile de décrire.

Si l'arc donné appartient à un petit cercle AMB, on déterminera d'abord sur cet arc deux points M et B également distants du point donné C, puis un second point P équidistant de ces deux-là, et il ne s'agira plus que de faire passer un arc de grand cercle par les points C et P. On conçoit, en effet, que si l'on joint les trois points C, P et O avec le milieu de la corde MB par des lignes droites, ces droites seront perpendiculaires à cette corde, et détermineront ainsi un plan qui lui sera perpendiculaire, et dont l'intersection avec la sphère sera un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc AMB.

375. PROBLÈMES A RÉSOUDRE. 1° *Par trois points*

donnés sur la surface d'une sphère décrire une circonférence de cercle. — Trouver le pôle d'un cercle donné.

2° *Décrire une circonférence de grand cercle qui passe par un point donné sur la surface d'une sphère et qui soit tangente à une circonférence donnée de petit cercle.*

3° *Par un point donné sur la surface d'une sphère tracer un arc de grand cercle qui fasse un angle donné avec un arc donné de grand cercle.*

4° *Décrire un arc de grand cercle tangent à deux cercles donnés sur la surface d'une sphère.*

LIVRE VIII.

DES POLYÈDRES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYÈDRES.

376. *On appelle* POLYÈDRE *un corps terminé de toutes parts par des plans.* Ces plans se coupent deux à deux suivant des lignes droites : de sorte que le polyèdre se trouve ainsi limité par une série de polygones que l'on nomme ses *faces,* et dont l'ensemble forme sa *surface.* Les côtés de ces faces sont les *arêtes* du polyèdre, et ses *sommets* sont ceux mêmes de ses angles polyèdres. Enfin on appelle *diagonale* la droite qui joint deux sommets non adjacents à la même face.

377. Un polyèdre est *convexe* ou à *angles saillants* lorsqu'une ligne droite ne peut rencontrer sa surface en plus de deux points; dans le cas contraire, il est *concave* ou à *angles rentrants.*

378. On classe les polyèdres d'après le nombre de leurs faces. Ainsi on appelle

tétraèdre un polyèdre qui a 4 faces,
pentaèdre.............. 5
hexaèdre.............. 6
etc.

On ne pousse guère cette nomenclature, au delà du polyèdre de huit faces, que pour le *dodécaèdre* et l'*icosaèdre,* polyèdres de *douze* et de *vingt* faces.

Remarquons que *le tétraèdre est le plus simple des polyèdres;* car il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre, et ces trois plans laissent un vide que l'on ne peut fermer qu'à l'aide d'un quatrième

plan. Il est clair que les faces du tétraèdre sont des triangles.

THÉORÈME I.

Fig. 247. **579**. *Deux tétraèdres* SABC *et* S′A′B′C′ *sont égaux lorsqu'ils ont leurs arêtes égales chacune à chacune, et que les faces formées par les arêtes homologues sont semblablement placées.*

Il suit immédiatement de cet énoncé que le trièdre S, par exemple, est égal au trièdre S′ (**167** et **497**), de sorte qu'en superposant ces deux trièdres, les deux tétraèdres auront leurs sommets confondus, et par conséquent coïncideront parfaitement.

THÉORÈME II.

580. *Deux tétraèdres* SABC *et* S′A′B′C′ *sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal* AB = A′B′ *compris entre deux triangles* SAB *et* S′A′B′, ABC *et* A′B′C′, *égaux chacun à chacun et semblablement placés.*

C'est la démonstration même du n° **159**.

THÉORÈME III.

581. *Deux tétraèdres* SABC *et* S′A′B′C′ *sont égaux lorsqu'ils ont une face égale* ABC = A′B′C′, *adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun, et dont les faces homologues sont semblablement placées.*

C'est la démonstration même du n° **161**.

582. Les tétraèdres sont dans l'espace ce que les triangles sont sur un plan. Ainsi, de même que l'on détermine la position d'un point sur un plan en le liant par un triangle à deux autres points donnés sur ce plan, de même aussi on fixe la position d'un point dans l'espace en le liant par un tétraèdre avec trois autres points donnés : d'où il suit qu'un polyèdre quelconque sera déterminé en donnant les sommets de trois de ses angles polyèdres, et leurs distances à tous

les autres (**379**) : de sorte qu'en désignant par S le nombre total de ses sommets, sa détermination exige que l'on connaisse les 3 (S — 3) lignes qui vont aboutir aux sommets du triangle que l'on a choisi pour base, et en outre les trois côtés de ce triangle, ce qui fait en tout 3 (S — 3) + 3 = 3 (S — 2) données. Observons toutefois que Legendre a reconnu que le nombre de ces données peut être beaucoup moindre que 3 (S—2).

383. *On appelle* PYRAMIDE *un polyèdre dont une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres sont des triangles qui ont leur sommet au même point.* Ainsi SABCDE est une pyramide dont le polygone ABCDE est la *base* et S le *sommet*. La perpendiculaire SO, abaissée du sommet sur la base, est la *hauteur* de la pyramide. Fig. 248.

Une pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale*, etc., selon que sa base est un *triangle*, un *quadrilatère*, un *pentagone*, etc. Une pyramide triangulaire n'est autre chose qu'un tétraèdre.

384. Si l'on observe que la surface latérale d'une pyramide peut être engendrée en faisant glisser sur le contour de sa base une ligne droite assujettie à passer par son sommet, on en conclura qu'un cône n'est qu'une pyramide dont la base a un nombre infini de côtés infiniment petits (**309**).

385. *Une pyramide est* RÉGULIÈRE *lorsque sa base est un polygone régulier, et qu'en même temps son sommet se projette au centre des cercles inscrit et circonscrit à ce polygone.*

386. Si l'on construit deux cônes qui aient ces cercles pour bases, et pour sommet commun celui de la pyramide, il est clair que le premier touchera chaque face latérale de cette pyramide (**327**) suivant la ligne qui va du sommet au milieu de la base de cette face, et que les arêtes de la pyramide seront des génératrices du second cône. En conséquence, on dit que ces cônes sont *inscrit* et *circonscrit* à la pyramide, et la géné-

ratrice du premier se nomme l'*apothème* de cette pyramide.

THÉORÈME IV.

587. *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base, les arêtes et toutes les lignes issues du sommet seront coupées par ce plan en parties proportionnelles* (**463**); *la section sera un polygone semblable à la base, et les aires de ces polygones seront proportionnelles aux carrés de leurs distances*
Fig. 248. *au sommet.*

Soit la pyramide SABCDE et A′B′C′D′E′ la section faite dans cette pyramide par un plan parallèle à sa base.

1° Je dis d'abord que le polygone A′B′C′D′E′ est semblable à ABCDE. En effet, ces polygones sont équiangles, puisque leurs angles ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Ensuite ils ont leurs côtés homologues proportionnels, car la similitude des triangles SAB et S′A′B′, SBC et S′B′C′, SCD et S′C′D′, etc., donne

$$\begin{aligned} &AB : A'B' :: SB : SB', \\ &SB : SB' :: BC : B'C' :: SC : SC', \\ &SC : SC' :: CD : C'D' :: SD : SD', \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: \text{etc.}$$

2° La similitude des polygones ABCDE et A′B′C′D′E′ nous donne (**398**)

$$ABCDE : A'B'C'D'E' :: \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 :: \overline{SB}^2 : \overline{SB'}^2 :: \overline{SO}^2 : \overline{SO'}^2.$$

588. COROLLAIRE. *Si les bases de deux pyramides de même hauteur* SO *et* TH *sont situées sur un même plan, les aires des sections* A′B′C′D′E′ *et* F′G′I′K′, *faites dans ces pyramides par un plan parallèle à celui-là, seront proportionnelles aux bases* ABCDE *et* FGIK.

On a en effet les deux proportions

$$\text{ABCDE} : \text{A'B'C'D'E'} :: \overline{\text{SO}}^2 : \overline{\text{SO'}}^2,$$
$$\text{FGIK} : \text{F'G'I'K'} :: \overline{\text{TH}}^2 : \overline{\text{TH'}}^2;$$

mais, par hypothèse, $\text{SO} = \text{TH}$, et $\text{SO'} = \text{TH'}$: donc

$$\text{ABCDE} : \text{FGIK} :: \text{A'B'C'D'E'} : \text{F'G'I'K'}.$$

389. *On nomme* PARALLÉLIPIPÈDE *un corps terminé par six plans parallèles deux à deux.* Fig. 249.

Il suit de cette définition qu'un parallélipipède est déterminé lorsque l'on connaît trois arêtes et l'angle trièdre qu'elles forment; car il suffit alors, pour le construire, de mener par l'extrémité de chaque arête un plan parallèle à celui des deux autres.

Théorème V.

390. *Les faces d'un parallélipipède sont des parallélogrammes; celles qui sont opposées sont égales; les angles trièdres opposés sont symétriques; et les diagonales menées par les sommets de ces angles se coupent mutuellement en deux parties égales dans un même point, qui est le* CENTRE *du parallélipipède.*

1° Chaque face telle que ABCD est un parallélogramme, parce que ses côtés opposés sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième.

2° Les deux faces opposées ABCD et FGIK ont leurs côtés AB et FG, BC et GI, égaux et parallèles (**174**) : donc elles ont un angle égal (**458**) compris entre côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égales (**181**).

3° Si l'on prolonge les arêtes du trièdre C, on formera un trièdre CB'D'I' symétrique de CBID (**498**), mais qui sera égal au trièdre F; car leurs faces sont égales chacune à chacune (**458**), et semblablement placées : donc le trièdre CBID est le symétrique de F.

4° Considérons les deux diagonales BK et GD qui

joignent les sommets opposés B et K et G et D. Il est clair qu'en joignant BD et GK, on formera un parallélogramme BDGK (**178**), dont ces lignes seront les diagonales : donc elles se coupent mutuellement en parties égales. Il en sera évidemment de même pour l'une quelconque des deux diagonales BK et GD, et chacune des deux autres AI et CF : donc les quatre diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent au même point et en deux parties égales.

5° Je dis enfin que leur point de section O est le centre du parallélipipède. Menons, en effet, par ce point une droite quelconque MN, et soient M et N les points où elle perce les deux faces opposées BF et CK. Si nous faisons passer un plan par cette droite et par la diagonale BK, ses traces BM et KN sur ces deux faces seront parallèles (**451**) : donc les triangles OBM et OKN auront un côté égal BO = OK adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir, BOM = KON (**49**) et OBM = OKN (**69**, 1°); donc ils seront égaux; donc OM = ON; donc toute ligne qui, passant par le point O, va se terminer à la surface du parallélipipède, est divisée en ce point en deux parties égales; donc ce point est le centre de cette surface (**180**).

591. Deux faces opposées quelconques d'un parallélipipède se nomment ses *bases*, et la perpendiculaire abaissée d'un point de l'une sur l'autre est sa *hauteur*.

592. Un *parallélipipède* est *droit* lorsque ses arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases; mais si, en outre, ces bases sont des rectangles, on lui donne le nom de *parallélipipède rectangle*, car toutes ses faces sont alors des rectangles.

593. Si les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède rectangle sont égales, ses six faces deviennent des carrés, et on l'appelle alors un *cube*. Il est clair que le cube est à la fois inscriptible et circonscriptible à la sphère.

594. *Le* PRISME *est un polyèdre dont deux faces*

sont des polygones ABCDE *et* FGHIK, *qui ont* Fig. 250.
leurs côtés égaux et parallèles chacun à chacun, et dont les autres faces AG, BH... *sont déterminées par les plans conduits suivant les côtés homologues* AB *et* FG, BC *et* GH..... *de ces polygones*. Ces autres faces sont évidemment des parallélogrammes (178); on les nomme les faces *latérales* du prisme, tandis que les deux polygones ABCDE et FGHIK sont appelés ses *bases*. La *hauteur* de ce polyèdre est la distance de ses deux bases.

595. Un *prisme* est *droit* lorsque ses arêtes latérales AF, BG..... sont perpendiculaires aux plans des bases.

Un *prisme* est *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal*, etc., selon que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, etc.

596. Si la base d'un prisme est un parallélogramme, ses faces latérales seront parallèles deux à deux (458), de sorte que ce polyèdre sera un parallélipipède (589).

597. Si l'on observe que la surface latérale d'un prisme peut être engendrée en faisant glisser une de ses arêtes latérales parallèlement à elle-même sur le contour de sa base, on en conclura qu'un cylindre est un prisme dont la base a une infinité de côtés infiniment petits.

598. *Un prisme est* RÉGULIER *lorsqu'il est droit, et que sa base est un polygone régulier.*

Si l'on construit deux cylindres droits qui aient même hauteur qu'un prisme régulier, et pour bases les cercles inscrit et circonscrit à la sienne, ces cylindres seront dits *inscrit* et *circonscrit* au prisme (539).

THÉORÈME VI.

599. *Deux prismes* AH *et* A'H' *sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre compris entre trois faces égales chacune à chacune et semblablement placées,* savoir :

$$ABCDE = A'B'C'D'E',\ AK = A'K',\ AG = A'G'.$$

Il suit immédiatement de cette hypothèse que les trièdres A et A′ sont égaux (**497**), et que par conséquent, si l'on superpose les deux bases ABCDE et A′B′C′D′E′ en faisant coïncider leurs côtés homologues, les arêtes AF et A′F′, coïncideront aussi; et, comme elles sont égales, le point F′ tombera sur le point F : donc les parallélogrammes AK et A′K′, AG et A′G′ se recouvriront exactement ; donc il en sera de même des bases supérieures, et, par suite, des faces latérales BH et B′H′, CI et C′I′, etc. ; donc les deux prismes sont égaux.

600. Corollaire I. *Deux prismes droits sont égaux lorsqu'ils ont des bases égales et des hauteurs égales :* car toutes leurs faces latérales sont des rectangles égaux chacun à chacun. Si donc les trièdres A et A′, par exemple, ont leurs faces semblablement placées, la condition énoncée au n° **599** sera remplie, et les prismes seront égaux; s'il n'en est pas ainsi, les trièdres A et F′ seront égaux, et par conséquent les prismes le seront aussi.

601. Corollaire II. Deux parallélipipèdes sont égaux dans les mêmes circonstances où deux prismes le sont (**595**).

602. Corollaire III. Un prisme est déterminé quand on connaît sa base et l'une de ses arêtes latérales en grandeur et en direction.

Théorème VII.

603. *Un polyèdre quelconque peut toujours être partagé en pyramides, et même en tétraèdres.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que le polyèdre sera convexe ou concave.

1° Si le polyèdre est convexe, on conduira des plans par un sommet quelconque A, et par chacune des arêtes des faces non adjacentes à ce sommet, et il sera ainsi décomposé en autant de pyramides qu'il y a de ces faces.

Si maintenant on partage la base de chaque pyramide en triangles, et que l'on mène des plans par chaque

ligne de division et par le sommet commun, on décomposera chacune de ces pyramides, et partant le polyèdre proposé, en tétraèdres.

2° Si notre polyèdre est concave, on le partagera immédiatement en pyramides, et par suite en tétraèdres, si, d'un point pris dans son intérieur, on peut mener à tous ses sommets des droites qui, pour y arriver, ne traversent aucune de ses faces. S'il n'en est pas ainsi, menez par le sommet de l'un de ses angles rentrants un plan qui passe entre les arêtes de cet angle, et le polyèdre se trouvera ainsi partagé en deux polyèdres qui, pris ensemble, auront un angle rentrant de moins que le premier. Si donc vous opérez de la même manière sur chacun de ceux-ci, et ainsi de suite, vous finirez par décomposer le polyèdre proposé en un certain nombre de polyèdres convexes, ce qui vous ramènera au premier cas.

Théorème VIII.

*604. *Le nombre* F *des faces d'un polyèdre, augmenté de celui* S *de ses sommets, surpasse de deux unités le nombre* A *de ses arêtes*, de sorte que l'on a $F + S - A = 2$ [1].

En effet, si l'on enlève une des faces de ce polyèdre, il deviendra un polyèdre *ouvert*, dont le nombre des faces sera $(F - 1)$, et qui aura le même nombre d'arêtes et de sommets que le proposé. Supprimons une quelconque des faces de ce second polyèdre, qui soit adjacente à la première. Il est clair que l'on aura effectué cette suppression en ôtant un polygone ouvert, lequel aura nécessairement un sommet de moins qu'il n'a de côtés : donc, si l'on désigne par s le nombre des sommets qu'on a enlevés, par F', S' et A' le nombre des faces, des sommets et des arêtes du nouveau polyèdre, on aura :

$$F' = F - 2, \qquad S' = S - s, \qquad A' = A - s - 1:$$

[1] Ce théorème est dû à Euler.

donc $F' + S' - A' = (F - 1) + S - A.$

Ainsi, en enlevant une face d'un polyèdre *ouvert* quelconque, l'excès du nombre des faces augmenté de celui des sommets sur le nombre des arêtes, demeurera constant. Il en sera donc de même si l'on supprime une seconde face, une troisième, etc., jusqu'à ce que l'on ait réduit le polyèdre à un simple polygone; mais alors la différence dont il s'agit sera évidemment égale à l'unité, puisqu'un polygone a autant d'arêtes que de sommets, donc :

$$F - 1 + S - A = 1 : \text{d'où} \quad F + S - A = 2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

605. SCHOLIE. Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre dû à M. *Cauchy*, et que l'on démontrerait de la même manière. (*Annales de mathématiques* et *Journal de l'École polytechnique.*)

* **606**. COROLLAIRE. *La somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre est égale à autant de fois quatre droits qu'il y a d'unités dans l'excès du nombre des arêtes sur celui des faces, ou à autant de fois quatre droits qu'il y a de sommets, moins deux.*

On sait en effet que la somme des angles d'un polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il a de côtés, moins *quatre* droits : donc la somme V des angles de toutes les faces d'un polyèdre est égale à autant de fois deux droits que ces faces ont de côtés, moins autant de fois quatre droits qu'il y a de faces. Mais, comme chaque arête appartient à deux faces, on voit qu'en comptant le nombre des côtés de toutes les faces du polyèdre, on trouve un nombre double de celui de ses arêtes : donc l'expression de V est

$$V = 2.2A - 4F = 4(A - F) = 4(S - 2),$$

d'après le théorème d'*Euler*, ce qu'il fallait démontrer.

* **607**. M. *Gergonne* a prouvé, dans les *Annales de mathématiques*, qu'à l'exception de quelques théorèmes, tels que celui d'*Euler*, dans lesquels le nombre des faces et celui des sommets figurent de la même ma-

nière, il n'est aucun théorème de ce genre auquel il ne doive en répondre un autre, qui s'en déduit indispensablement, en y permutant simplement entre eux les mots *faces* et *sommets*. Nous allons indiquer brièvement la marche qui conduit à ces théorèmes.

Soient c, d, e, f, g, h.... le nombre des faces qui ont 3, 4, 5, 6, 7, 8.... côtés, et c', d', e', f', g', h'.... le nombre des angles polyèdres qui ont 3, 4, 5, 6, 7, 8.... faces.

Comme chaque arête appartient à deux faces et aboutit à deux sommets, on aura

$$2A = 3c + 4d + 5e + 6f + \ldots, 2A = 3c' + 4d' + 5e' + 6f' + \ldots$$

Or, si l'on retranche de $2A$, $2c + 4d + 4e + 6f + 6g + 8h$ ...., le reste $c + e + g + \ldots$ sera pair. Il en est évidemment de même pour la quantité $c' + e' + g' + \ldots$: donc

Les FACES *d'un nombre impair de côtés sont toujours en nombre pair.*

Les SOMMETS *d'un nombre impair d'arêtes sont toujours en nombre pair.*

D'un autre côté

$$F = c + d + e + f + \ldots, \quad S = c' + d' + e' + f' + \ldots;$$

donc, en substituant ces valeurs de F, S, A, dans l'équation $F + S = A + 2$, après en avoir doublé tous les termes, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} 2(c + d + e + f + \ldots\ldots) = 4 + c' + 2d' + 3e' + 4f' + \ldots\ldots \\ 2(c' + d' + e' + f' + \ldots\ldots) = 4 + c + 2d + 3e + 4f + \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots(1),$$

équations qui se changent l'une dans l'autre par la simple permutation des lettres c et c', d et d', etc. : donc elles expriment des théorèmes qui se changent l'un dans l'autre par la seule permutation des mots *face* et *sommet*.

Si l'on ajoute la seconde au double de la première, ce qui revient à éliminer c' entre elles, on trouvera :

$$3c + 2d + e = 12 + (g + 2h + 3i + \ldots) + 2(d' + 2e' + 3f' + \ldots)\ldots(2),$$

équation absurde si c, d, e, sont nuls : donc

Il n'y a aucun polyèdre dont toutes les FACES *aient plus de cinq côtés, ou dont tous les* SOMMETS *aient plus de cinq arêtes.*

Si d et e sont nuls, c vaut au moins 4; si c et e sont nuls, d vaut au moins 6; si c et d sont nuls, e vaut au moins 12 : donc

Un polyèdre qui n'a ni FACES *quadrangulaires ni pentagonales, a au moins quatre* FACES *triangulaires.*

Un polyèdre qui n'a ni FACES *triangulaires ni pentagonales, a au moins six* FACES *quadrangulaires.*

Un polyèdre qui n'a ni FACES *triangulaires ni quadrangulaires, a au moins douze* FACES *pentagonales.*

Un polyèdre qui n'a ni SOMMETS *tétraèdres ni pentaèdres, a au moins quatre* SOMMETS *trièdres.*

Un polyèdre qui n'a ni SOMMETS *trièdres ni pentaèdres, a au moins six* SOMMETS *tétraèdres.*

Un polyèdre qui n'a ni SOMMETS *trièdres ni tétraèdres, a au moins douze* SOMMETS *pentaèdres.*

Si $d', e', f' \ldots$ étant nuls, on suppose que $d, e, g, h \ldots$, ou $c, e, g, h \ldots$, ou $c, d, g, h \ldots$ soient nuls en même temps, on aura $c = 4$, ou $d = 6$, ou $e = 12$: donc

Si tous les SOMMETS *d'un polyèdre sont trièdres, et qu'il n'ait que des* FACES *triangulaires et hexagonales, ou quadrangulaires et hexagonales, ou pentagonales et hexagonales, il a nécessairement quatre* FACES *triangulaires, ou six quadrangulaires, ou douze pentagonales.*

Si toutes les FACES *d'un polyèdre sont triangulaires, et qu'il n'ait que des* SOMMETS *trièdres et hexaèdres, ou tétraèdres et hexaèdres, ou pentaèdres et hexaèdres, il a nécessairement quatre* SOMMETS *trièdres, ou six* SOMMETS *tétraèdres, ou douze pentaèdres.*

Si $d, e, f, g \ldots$ étant nuls, on suppose que tous les sommets soient trièdres, ou tétraèdres, ou pentaèdres, on a $c = 4$, ou $3c = 12 + 2d'$, ou $3c = 12 + 4c'$; mais l'équation (2) donne, en permutant c et c', d et d', etc. :

$$3c' + 2d' + e' = 12 + (g' + 2h' + 3i' + \ldots) + 2(d + 2e + 3f + \ldots) \ldots (3);$$

d'où l'on tire, dans nos deux dernières hypothèses, $d' = 6$ et $e' = 12$, partant $c = 8$ ou $c = 20$.

Si $c, e, f \ldots$ étant nuls, on suppose que tous les sommets soient trièdres, on a $d = 6$. On ne saurait supposer que les sommets, ayant tous le même nombre d'arêtes, en eussent chacun plus de trois : car les équations (2) et (3) seraient alors contradictoires.

Si $c, d, f, g \ldots$ étant nuls, on suppose que tous les sommets soient trièdres, on aura $e = 12$. On ne saurait supposer que les sommets, ayant tous le même nombre d'arêtes, en eussent chacun plus de trois : car alors les équations (2) et (3) seraient contradictoires. Ainsi

Il ne peut y avoir que cinq sortes de polyèdres dont toutes les faces aient le même nombre de côtés, et tous les angles le même nombre d'arêtes : ce sont le *tétraèdre*, l'*octaèdre*, l'*icosaèdre*, l'*hexaèdre* et le *dodécaèdre*.

Si l'on ajoute les équations (1), d et d' disparaîtront, et l'on aura :

$$c + c' = 8 + (e + 2f + 3g + \ldots) + (e' + 2f' + 3g' + \ldots) \ldots . \quad (4).$$

Si l'on élimine e entre les équations (1), il viendra :

$$4c + 2d + c' = 20 + 2(f + 2g + \ldots) + 2d' + 5e' + \ldots\ldots \quad (5).$$

On déduira de ces deux dernières équations des théorèmes analogues à ceux que nous avons établis plus haut, et entre autres celui-ci :

Un polyèdre ne saurait être privé à la fois de faces triangulaires et d'angles trièdres, et il faut même que le nombre des uns et des autres ne soit pas moindre que huit.

Théorème IX.

608. *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils ont toutes leurs faces égales chacune à chacune, semblablement placées et également inclinées.*

En effet, si l'on place une des faces de l'un des polyèdres sur celle qui lui est égale dans l'autre, on verra

facilement que les faces qui lui sont contiguës viendront coïncider avec leurs homologues, et ainsi de suite de proche en proche, de sorte que le premier polyèdre recouvrira exactement le second.

Observons toutefois que l'énoncé de ce théorème renferme évidemment plus de conditions qu'il n'en faut pour que deux polyèdres soient égaux. M. *Cauchy* a démontré en effet que *deux polyèdres convexes sont égaux quand ils ont toutes leurs faces égales chacune à chacune, et semblablement placées.* (Journal de l'École polytechnique.)

CHAPITRE II.

DES POLYÈDRES SEMBLABLES.

609. *On appelle* TÉTRAÈDRES SEMBLABLES *deux tétraèdres qui ont leurs arêtes proportionnelles et semblablement disposées* [1]. Il existe de pareils tétraèdres,
Fig. 251. car si l'on prend sur la direction des arêtes SA, SB, SC, du tétraèdre SABC des distances SD, SE, SF qui leur soient respectivement proportionnelles, le plan qui passera par les trois points D, E, F, déterminera un tétraèdre SDEF, dont les arêtes seront toutes proportionnelles à celles du premier. En effet le plan sera parallèle au plan ABC (464); donc les triangles ABC et DEF, sont semblables, et par conséquent

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF};$$

[1] Il faut entendre par là que les trois arêtes qui déterminent un angle trièdre sont proportionnelles à celles qui déterminent un autre angle trièdre, et que si l'on dispose les plans de deux faces des tétraèdres, de manière que deux arêtes de l'une coïncident avec les deux arêtes homologues de l'autre, les sommets opposés à ces faces seront situés d'un même côté du plan commun.

mais la similitude des triangles SAB, SDE, donne aussi

$$\frac{SA}{SD}=\frac{AB}{DE}.$$

Donc on a

$$\frac{SA}{SD}=\frac{SB}{SE}=\frac{SC}{SF}=\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}.$$

On voit de plus que les arêtes de nos deux tétraèdres sont semblablement disposées.

610. Il suit de cette définition que *deux tétraèdres semblables ont leurs faces semblables chacune à chacune* (**248**), *leurs angles trièdres et dièdres égaux chacun à chacun* (**497**).

Théorème I.

611. *Deux tétraèdres* SABC *et* S′A′B′C′ *sont semblables, lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces* SAB *et* S′A′B′, SAC *et* S′A′C′ *semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Je prends, à partir du point S, SD = S′A′, SE = S′B′, SF = S′C′ et par les trois points D, E, F, je mène un plan. Ce plan coupera donc les arêtes de l'angle trièdre S en parties proportionnelles, puisque ces arêtes sont proportionnelles à celles de l'angle trièdre S′, à cause de la similitude des triangles SAB et S′A′B′, SAC et S′A′C′ : donc il est parallèle à ABC ; donc le tétraèdre SDEF est semblable à SABC (**609**). Mais les tétraèdres SDEF et S′A′B′C′ sont superposables, car les angles trièdres S et S′ sont égaux (**501**), donc ce dernier est aussi semblable à SABC.

Théorème II.

612. *Deux tétraèdres* SABC *et* S′A′B′C′ *sont semblables lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et dont les faces homologues sont semblablement disposées.*

Soit la face SAC semblable à S′A′C′. Prenons

encore SD = S′A′, SE = S′B′, SF = S′C′ et menons un plan par les trois points D, E, F. Le trièdre S est égal au trièdre S′ (**502**); donc les deux tétraèdres SDEF et S′A′B′C′ sont superposables, et l'angle dièdre SDFE est par conséquent égal à S′A′C′B′, et par suite à l'angle dièdre SACB. Puis donc que la similitude des triangles SAC et SDF exige que l'arête DF soit parallèle à AC, on voit que le plan DEF est parallèle à ABC (**486**); donc le tétraèdre SDEF, c'est-à-dire S′A′B′C′ est semblable à SABC.

Théorème III.

613. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont tous leurs angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

En effet nos deux tétraèdres ont leurs angles trièdres égaux chacun à chacun (**500**), de sorte que leurs faces homologues sont équiangles entre elles et que par conséquent leurs arêtes homologues sont proportionnelles.

614. Scholie. L'énoncé de ce théorème renferme une condition de trop, car, pour établir la similitude des faces des deux tétraèdres, il suffit de supposer que *cinq* angles dièdres soient égaux chacun à chacun.

615. *On appelle polyèdres semblables deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés* [1].

---

[1] C'est-à-dire, 1° que les deux angles dièdres dont l'arête commune est une des arêtes mêmes de la face qui assemble les deux tétraèdres du premier polyèdre auxquelles ils appartiennent, sont homologues de ceux dont l'arête commune est une des arêtes de la face qui réunit les deux tétraèdres du second polyèdre ; 2° que si l'on place l'une des faces de jonction sur sa correspondante, en faisant coïncider deux côtés homologues, les tétraèdres semblables seront alors situés d'un même
Fig. 252. côté du plan commun. Soit, par exemple, le polyèdre SABCDE composé des tétraèdres SABC, SACD et SADE, et supposons

Théorème IV.

616. *Deux polyèdres semblables* P *et* P′ *ont leurs faces homologues semblables, leurs angles dièdres et leurs angles polyèdres égaux chacun à chacun.*

Puisque les deux polyèdres sont semblables, on peut les décomposer en un même nombre de tétraèdres semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés (**605**) : supposons cette décomposition effectuée, alors les surfaces de nos deux polyèdres seront partagées en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement placés; et je dis que si deux ou plusieurs de ces triangles sont dans un même plan, et forment une même face de P, leurs homologues seront aussi dans un même plan, et formeront une face de P′ semblable à celle de P (**254**). Soient, en effet, ABC et ACD, deux triangles adjacents du polyèdre P, et S le sommet commun des tétraèdres auxquels ils appartiennent; A′B′C′ et A′C′D′ les triangles homologues de P′, et S′ le sommet homologue à S. Les angles dièdres SACB et SACD seront respectivement égaux à S′A′C′B′ et à S′A′C′D′ (**610**); or, si les deux triangles ABC et ACD sont dans un même plan, les deux angles dièdres SACB et SACD seront supplémentaires : donc il en sera de même de S′A′C′B′ et de S′A′C′D′, et par Fig. 252.

---

que la face ABC du premier soit posée sur le plan même de la figure, et que tous les autres sommets S, D, E, soient au-dessus de ce plan. Si l'on veut construire un polyèdre composé de tétraèdres semblables à ceux-ci, et qui soient semblablement placés, on formera d'abord un tétraèdre S′A′B′C′ semblable au premier; puis, comme les deux dièdres BACS et SACD ont AC pour arête commune, on construira sur A′S′C′ un tétraèdre semblable à SACD, en ayant soin que le dièdre homologue à S′A′C′D′ ait A′C′ pour arête, et que la face A′C′D′ soit du côté opposé au plan ABC. Enfin on mènera par A′D′ un plan qui fasse avec S′A′D′ un angle dièdre égal à SADE, mais qui soit du côté opposé au triangle A′C′D′, et en construisant, sur A′D′ et dans ce plan un triangle A′D′E′ semblable à ADE et semblablement placé, le troisième tétraèdre sera déterminé.

conséquent les triangles A′B′C′ et A′C′D′, seront aussi dans un même plan. Donc les polyèdres P et P′ ont leurs faces semblables chacune à chacune.

Si, au contraire, les deux triangles ABC et ACD ne sont pas dans un même plan, leurs homologues A′B′C′ et A′C′D′ n'y seront pas non plus, et l'angle dièdre BACD sera égal à B′A′C′D′; donc les angles dièdres homologues des deux polyèdres sont égaux, car ce sont ou des angles dièdres homologues de tétraèdres semblables, ou des sommes d'angles dièdres homologues de pareils tétraèdres.

Quant aux angles polyèdres homologues, ils sont égaux comme ayant toutes leurs faces égales chacune à chacune, semblablement disposées et également inclinées.

Théorème V.

617. Réciproquement *deux polyèdres sont semblables lorsqu'ils ont toutes leurs faces semblables chacune à chacune, semblablement disposées et également inclinées.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que les polyèdres proposés seront convexes ou concaves.

1° Les polyèdres étant convexes, nous pourrons partager l'un d'eux en tétraèdres, par des plans passant par l'un de ses sommets (**603**, 1°), et conduire ensuite des plans par les sommets homologues du second; de cette manière ils se trouveront décomposés en un même nombre de tétraèdres semblablement disposés. Il s'agit de prouver que ces tétraèdres seront semblables chacun à chacun (**615**).

Fig. 253. Soient SABCDE et S′A′B′C′D′E′ deux fragments des polyèdres proposés : nous supposons que les triangles SBC et S′B′C′, SCD et S′C′D′ soient formés en joignant des sommets homologues de deux faces semblables, semblablement disposées et formant des angles dièdres égaux BCSD et B′C′S′D′. Nous faisons la même hypothèse sur les triangles SAB et S′A′B′, SED et

S′E′D′, sur les angles dièdres ABSC et A′B′S′C′, CDSE et C′D′S′E′; enfin le fragment SABCDE se compose des tétraèdres SABC, SAEC et SDCE.

Parmi les tétraèdres qui composent les deux polyèdres, il y en a qui ont deux faces communes avec eux et comprenant entre elles des angles dièdres égaux, puisqu'ils appartiennent aux polyèdres. Tels sont les tétraèdres SDEC et S′D′E′C′ qui ont le dièdre SD=S′D′ compris entre les faces semblables SDE et S′D′E′ (**254**), SDC et S′D′C′, donc ces tétraèdres sont semblables (**611**), et par conséquent les faces SCE et S′C′E′ sont semblables, et les angles dièdres DCSE et D C′S′E′ sont égaux. Mais les tétraèdres SABC et S′A′B′C′ sont aussi semblables, comme ayant l'angle dièdre BS=B′S′ compris entre les faces semblables SBC et S′B′C′, SAB et S′A′B′; donc la face SAC est semblable à S′A′C′, et l'angle dièdre BCSA est égal à B′C′S′A′. Mais l'angle dièdre BCSD du premier polyèdre est égal à son homologue B′C′S′D′; si donc on en retranche respectivement les angles DCSE et D′C′S′E′, BCSA et B′C′S′A′, les angles dièdres restants ACSE et A′C′S′E′ seront égaux; par conséquent les tétraèdres SACE et S′A′C′E′ seront semblables (**611**), et ainsi des autres.

Cette démonstration est entièrement analogue à celle du n° **258** relative aux polygones.

2° Considérons deux polyèdres concaves. On pourra, en menant convenablement des plans par les arêtes des angles rentrants, les décomposer en polyèdres convexes, de sorte que notre théorème sera démontré, d'après ce qui précède, si nous prouvons que ces polyèdres convexes ont toutes leurs faces semblables chacune à chacune, semblablement disposées et également inclinées.

Soient donc AK et A′K′ deux polyèdres qui ont toutes leurs faces semblables, semblablement disposées et leurs angles dièdres égaux chacun à chacun (la figure représente deux prismes). Soient ABMNO et A′B′M′N′O′ les sections faites dans ces corps, par deux Fig. 254.

plans menés par les arêtes homologues AB et A′B′ et également inclinées sur les faces AG et A′G′. Les deux angles trièdres BMGA et B′M′G′A′ ont la face ABG = A′B′G′ adjacente aux angles dièdres égaux MABG et M′A′B′G′, ABGC et A′B′G′C′; donc ces angles trièdres sont égaux (**502**), et ainsi les angles ABM et A′B′M′, GBM et G′B′M′ sont égaux, ainsi que les angles dièdres GBMN et G′B′M′N′. Mais de ce que l'angle GBM = G′B′M′, il résulte que les droites BM et B′M′ partagent les polygones semblables MG et M′G′ en deux polygones semblables chacun à chacun (**259**); donc l'angle BMI = B′M′I′, et nous nous retrouvons au point M dans les mêmes circonstances qu'au point B. Nous en conclurons donc que l'angle BMN = B′M′N′ et que le polygone NI est semblable à N′I′, et que l'angle dièdre IMNO = I′M′N′O′ et ainsi de suite. Or, il résulte de la similitude des faces AG et A′G′, MG et M′G′, NI et N′I′, etc., que l'on a

AB : A′B′ :: BG : B′G′ :: BM : B′M′ :: MI : M′I′ :: MN : M′N′ :: etc.;

donc les deux polygones ABMNO et A′B′M′N′O′ sont semblables (**258**); donc les deux polyèdres ABMNOFGIKL et A′B′M′N′O′F′G′I′K′L′ ont toutes leurs faces semblables, semblablement disposées et également inclinées.

618. *On appelle points homologues deux points qui sont liés à deux faces homologues par deux tétraèdres semblables et semblablement disposés. Les droites, dont les extrémités sont des points homologues, sont dites droites homologues.*

Théorème VI.

619. *Dans deux polyèdres semblables les droites homologues sont proportionnelles aux arêtes homologues de ces polyèdres.*

Fig. 255. Supposons que ABC et A′B′C′, DEF et D′E′F′ étant des triangles homologues de deux faces semblables des deux polyèdres, les tétraèdres SABC et S′A′B′C′,

TDEF et T′D′E′F′ soient semblables et semblablement placés, de sorte que les points S et S′, T et T′ sont des points homologues; je dis que les droites homologues ST et S′T′ sont proportionnelles aux arêtes homologues BC et B′C′. En effet, il résulte de la similitude des tétraèdres TDEF et T′D′E′F′ que les faces TDF et T′D′F′ sont semblables, et que les angles dièdres TDFC et T′D′F′C′ sont égaux, mais le triangle DCF est semblable à D′C′F′; donc le tétraèdre TDCF est semblable à T′D′C′F′ (**611**). On verra de même que les tétraèdres TFCB et T′F′C′B′ le seront aussi, et de là on conclura facilement la similitude des tétraèdres TBCS et T′B′C′S′ (**611**), et par suite que

$$ST : S'T' :: BC : B'C'.$$

CHAPITRE III.

DES POLYÈDRES SYMÉTRIQUES.

620. *On appelle* POLYÈDRES SYMÉTRIQUES *deux polyèdres qui peuvent être placés de telle manière que les droites qui joindront les sommets du premier avec ceux du second, iront se croiser en un même point, où elles seront coupées en deux parties égales. Ce point se nomme le* CENTRE DE SYMÉTRIE *des deux polyèdres et les sommets correspondants sont dits symétriques ou homologues.*

Il existe de pareils polyèdres. Soit, en effet, ABCDE Fig. 256.
une face quelconque d'un polyèdre; joignons les sommets de ce polygone avec un point quelconque O, et prolongeons chacune de ces droites d'une quantité égale à elle-même : je dis que tous les points A′, B′, C′, D′, E′ ainsi déterminés sont dans un même plan. En effet, s'il n'en est pas ainsi, menons par le point A′ un plan parallèle à ABCDE, et soit B″ le point où il coupera BOB′ : l'égalité des triangles AOB et A′OB″ (**161**) exigera que l'on ait OB″ = OB = OB′, ce qui est ab-

surde ; donc il passera par tous les points A′, B′, C, D′, E′, et les deux polygones ayant leurs côtés égaux et parallèles chacun à chacun seront égaux. Donc, en faisant pour toutes les faces du polyèdre proposé, ce que nous avons fait pour la face ABCDE, on formera un polyèdre symétrique de celui-ci.

Théorème I.

621. *Deux polyèdres symétriques ont toutes leurs faces égales chacune à chacune, leurs angles dièdres homologues égaux, leurs angles polyèdres symétriques, et ils pourront être décomposés en un même nombre de tétraèdres symétriques chacun à chacun, mais inversement disposés.*

En effet, la démonstration du numéro précédent prouve d'abord que les faces symétriques seront égales chacune à chacune. On voit ensuite que si CE et C′E′ sont deux arêtes symétriques, ces arêtes seront parallèles, de sorte que les deux angles trièdres C et C′ ayant leurs faces symétriques égales (**458**), auront leurs angles dièdres égaux chacun à chacun.

Quant aux angles polyèdres, ils auront leurs faces symétriques égales, également inclinées et inversement placées, donc ils seront symétriques (**498**).

On voit enfin que si on décompose le premier polyèdre d'une manière quelconque en tétraèdres, on pourra, en menant des plans par les sommets symétriques du second, le décomposer aussi en tétraèdres, lesquels seront les symétriques des premiers, puisqu'ils satisfont à la définition (**620**).

Théorème II.

622. *Deux polyèdres symétriques peuvent être placés symétriquement par rapport à un plan donné quelconque*, c'est-à-dire de telle sorte que leurs sommets homologues soient situés à égale distance du plan dont il s'agit, sur une même perpendiculaire à ce plan.

Transportons, en effet, le système des deux polyèdres

de manière que leur centre de symétrie se trouve en un point quelconque O du plan donné MN, et menons par ce point une perpendiculaire OZ à ce plan. Maintenant faisons faire une demi-révolution au polyèdre inférieur autour de OZ. Il est clair que la projection a' du sommet A′ sur MN viendra coïncider avec la projection a du sommet symétrique A de l'autre polyèdre; car $Oa' = Oa$ à cause de l'égalité des triangles OAa et $OA'a'$. Il en sera de même des projections de tous les autres sommets des deux polyèdres. Ainsi les deux corps seront actuellement disposés de telle sorte que tous leurs sommets seront situés deux à deux sur une perpendiculaire au plan MN, et à égale distance de ce plan. Donc ces deux polyèdres sont symétriques par rapport à ce plan. Fig. 257.

Le plan MN est donc un *plan de symétrie* des deux polyèdres.

Théorème III.

625. Réciproquement, *si deux polyèdres sont symétriques par rapport à un plan* MN, *ils pourront être placés symétriquement par rapport à un point quelconque* O *de ce plan.*

Faisons faire une demi-révolution au polyèdre inférieur autour de OZ. De cette manière la projection a du sommet A″ sur le plan MN viendra se placer en a' sur le prolongement de aO, et le point A″ se trouvera ainsi transporté en A′. Si alors on joint OA′ et OA, on formera deux triangles égaux OAa, et $OA'a'$ (**159**); car les angles a et a' sont droits, $Oa = Oa'$, et $a'A' = aA''$ est ainsi égal à Aa. Donc l'angle $AOa = A'Oa'$, et AOA′ est par conséquent une ligne droite divisée au point O en deux parties égales; donc les deux polyèdres seront alors situés de telle manière que les droites qui joindront leurs sommets homologues iront se croiser au point O et y seront divisées en deux parties égales; donc ce point est un centre de symétrie des deux polyèdres.

CHAPITRE IV.

DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

624. *On appelle* POLYÈDRE RÉGULIER *celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles polyèdres sont égaux entre eux.* Tel est le *cube* (**593**) : car toutes ses faces sont des carrés égaux, et tous ses angles trièdres sont trirectangles, et par conséquent égaux.

THÉORÈME I.

625. *Tout polyèdre régulier est à la fois inscriptible et circonscriptible à une sphère.*

Fig. 258. Soient BAC, CAD, deux faces adjacentes, F et G les centres des cercles inscrits et circonscrits à ces faces. Si l'on élève en ces points des perpendiculaires à leurs plans, elles iront concourir au centre O de la sphère qui passerait par les quatre sommets C, B, A, D (**547**). Je dis maintenant que les perpendiculaires élevées au centre de chacune des autres faces du polyèdre iront concourir au point O; et, pour le démontrer, il suffira de prouver qu'il en sera ainsi pour une troisième face EDK adjacente à l'une des deux premières. Soit donc O′ le point où la perpendiculaire élevée au plan de cette face par son centre I coupe OG. Si l'on joint les points F et G au milieu M de AC et les points G et I au milieu N de DE, on formera deux quadrilatères OFMG et O′GNI qui auront les angles F, G et I droits, les angles FMG et GNI égaux, car ce sont les angles rectilignes correspondants aux angles dièdres BACD et ADEK, et les côtés FM, MG, NG et NI égaux entre eux : donc ces quadrilatères sont égaux (**204**) et par conséquent le point O′ coïncide avec O; donc OF = OG = OI. Donc toutes les faces sont équidistantes du point O, et par consé-

quent le polyèdre sera circonscrit à la sphère dont le rayon est OF. Mais ce même point O est aussi équidistant des sommets de chaque face (547) : donc la sphère décrite avec le rayon OA sera circonscrite au polyèdre.

626. Corollaire i. *Tout polyèdre régulier peut être partagé en autant de pyramides régulières égales qu'il a de faces.* Il suffit, pour effectuer cette décomposition, de mener des plans par le centre O et par chacune de ses arêtes.

627. Corollaire ii. Réciproquement, *un polyèdre est régulier lorsqu'on peut le décomposer en pyramides régulières égales en menant des plans par chacune de ses arêtes, et par un point pris dans son intérieur.* D'abord toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux; ensuite tous ses angles dièdres sont égaux : car l'angle BACD, par exemple, est double de l'angle dièdre à la base de l'une quelconque de ces pyramides.

Théorème II.

628. *Il ne peut y avoir que cinq sortes de polyèdres réguliers.*

Nous avons vu que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe était toujours moindre que quatre droits. Par conséquent, si toutes ces faces sont égales, leur nombre sera nécessairement moindre que le quotient que l'on obtient en divisant quatre droits par la valeur d'une face. D'où il suit, en observant d'ailleurs que les angles d'un triangle équilatéral, d'un carré, d'un pentagone et d'un hexagone régulier, valent respectivement (l'unité angulaire est l'angle droit)

$$\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{6}{5}\ \text{et}\ \frac{4}{3},$$

1° Que, si les faces du polyèdre sont des triangles équilatéraux, le nombre des triangles réunis autour d'un même sommet sera plus petit que $\frac{4}{\frac{2}{3}} = 6$: donc chaque

angle polyèdre ne pourrra être formé qu'avec *trois*, *quatre* ou *cinq* angles de triangles équilatéraux;

2° Que, si les faces sont des carrés, on ne pourra en assembler que *trois*, pour former chaque angle polyèdre;

3° Que, si les faces sont des pentagones, le nombre de ces polygones réunis autour d'un même sommet sera moindre que $\frac{4}{\frac{6}{5}} = \frac{10}{3} < 4$: donc on ne pourra former chaque angle polyèdre qu'avec *trois* angles de pentagone;

4° Que les faces d'un polyèdre régulier ne peuvent avoir plus de *cinq* côtés; car si l'on voulait employer même des hexagones, on trouverait que le nombre des faces de chacun de ses angles devrait être moindre que $\frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$, ce qui est absurde.

Donc *il ne peut y avoir que* CINQ *sortes de polyèdres réguliers :* TROIS *formés en réunissant autour d'un même sommet* TROIS, QUATRE *ou* CINQ TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX; *et* DEUX *dont les angles polyèdres résulteraient de l'assemblage de* TROIS CARRÉS *ou de* TROIS PENTAGONES.

* *Combien chacun d'eux a-t-il de faces?*

Soient f le nombre des côtés de chacune et s le nombre des arêtes de chaque angle polyèdre. Le nombre total des arêtes de toutes les faces sera donc Ff, en conservant la notation du n° **604**; mais comme chacune appartient à deux faces, il s'ensuit que le nombre des arêtes du polyèdre n'est que la moitié de Ff, et qu'ainsi $Ff = 2A$; on verra de même que $Ss = 2A$, et qu'ainsi nous avons, pour déterminer A, F et S, les trois équations

$$Ff = 2A, \quad Ss = 2A, \quad F + S - A = 2.$$

desquelles on tire facilement

$$F = \frac{4s}{2(f+s) - fs}.$$

Or, dans les cinq polyèdres réguliers dont nous avons reconnu la possibilité, on a successivement :

$$f=3,\quad 3,\quad 3,\quad 4,\quad 5;$$
$$s=3,\quad 4,\quad 5,\quad 3,\quad 3,$$

et alors la formule précédente donne respectivement :

$$\mathrm{F}=4,\quad 8,\ 20,\quad 6,\ 12.$$

Les cinq polyèdres réguliers dont nous avons maintenant à démontrer l'existence, sont donc le *tétraèdre*, l'*octaèdre*, l'*icosaèdre*, l'*hexaèdre* et le *dodécaèdre*. Nous y parviendrons en résolvant le problème suivant :

Problème I.

* **629**. *Construire un polyèdre régulier d'espèce déterminée, connaissant son arête.*

S'il y a des polyèdres réguliers, ils peuvent être décomposés en autant de pyramides régulières égales qu'ils ont de faces, et réciproquement (**626** et **627**); et, comme le côté de la base de chacune est donné par l'énoncé du problème, ces pyramides intégrantes seraient déterminées si l'on connaissait les angles dièdres que forment leurs faces (¹). Concevons une sphère dont le centre soit au sommet de l'une de nos pyramides; les faces de cette pyramide intercepteront sur cette sphère un polygone sphérique dont les angles seront les angles dièdres mêmes formés par ces faces; si donc on représente par x la valeur de l'un de ces angles dièdres, on aura pour expression de l'aire de ce polygone sphérique $fx-2(f-2)$, en prenant l'aire du triangle trirectangle pour unité (**633**); par conséquent la somme

(¹) En effet, chaque angle trièdre à la base est isoèdre, et l'on connaît dans ce trièdre l'angle dièdre formé par les deux faces égales et la face qui lui est opposée. Pour obtenir ces faces, il n'y aura donc qu'à renverser la construction par laquelle on détermine l'angle dièdre opposé à la face de développement, lorsque l'on connaît les trois faces (voyez la géométrie descriptive).

des aires des polygones que les angles au sommet de toutes les pyramides interceptent sur notre sphère sera $\{fx - 2(f-2)\}$.F. Mais cette somme est précisément celle de la sphère, qui vaut 8 fois le triangle trirectangle, donc

$$\{fx - 2(f-2)\}\,F = 8, \text{ d'où } x = \frac{8+2(f-2)F}{Ff}.$$

En remplaçant F et f par leurs valeurs respectives, on trouvera que l'inclinaison de deux faces adjacentes de l'une des pyramides intégrantes du tétraèdre est $\frac{4}{3}$,
de l'octaèdre est 1,
de l'icosaèdre est $\frac{4}{5}$,
de l'hexaèdre est $\frac{4}{3}$,
du dodécaèdre est $\frac{4}{3}$.

En conséquence, si l'on veut construire le dodécaèdre, par exemple, on construira une pyramide pentagonale régulière dont le côté soit égal à l'arête donnée, et telle que l'inclinaison de deux faces adjacentes soit les $\frac{4}{3}$ d'un angle droit; puis, réunissant *douze* de ces pyramides, l'espace se trouvera rempli autour de leur sommet commun, et le problème sera résolu (627). Les quatre autres polyèdres réguliers pourront être construits de la même manière. Observons toutefois que, pour obtenir l'hexaèdre régulier, il sera plus simple de construire un parallélipipède rectangle dont les trois arêtes contiguës soient égales à la ligne donnée [1].

---

[1] Si l'on suppose nul le dénominateur de la valeur de F (628), on aura l'équation $2(f+s) = fs$, à laquelle on ne peut satisfaire que par les trois couples

$$f=3,\ f=4,\ f=6;$$
$$s=6,\ s=4,\ s=3.$$

Ainsi *une sphère peut, sous trois points de vue différents, être regardée comme un polyèdre régulier d'un nombre infini de faces infiniment petites, formé en réunissant autour d'un même point*, 1° *des triangles* SIX *à* SIX; 2° *des carrés* QUATRE *à* QUATRE; 3° *des hexagones* TROIS *à* TROIS.

LIVRE IX.

DES AIRES DES CORPS.

CHAPITRE PREMIER.

DES AIRES DES CORPS.

LEMME I.

630. *L'aire de la projection d'un triangle qui n'est point parallèle au plan de projection est plus petite que celle de ce triangle.*

Nous pouvons supposer que le plan de projection passe par l'un des sommets de notre triangle, car les projections d'une même figure sur deux plans parallèles sont évidemment égales. Cela posé, deux cas peuvent se présenter, suivant que l'un des côtés du triangle sera dans le plan de projection ou qu'il n'y sera pas.

Dans le premier cas, A'BC étant la projection du triangle ABC, si on tire A'I perpendiculairement sur BC et que l'on joigne AI, on aura la hauteur du triangle ABC; or $A'I < AI$, donc $A'BC < ABC$ (**371**). Fig. 259.

Dans le deuxième cas, je prolonge le côté AC jusqu'à sa rencontre avec le plan de projection en D, et alors je puis regarder le triangle ABC comme la différence des deux triangles ABD et BCD qui ont un côté dans le plan de projection, de sorte que sa projection BA'C' sera la différence de celles de ces deux triangles : Or, si des points A' et C' on abaisse des perpendiculaires sur BD et que l'on tire AK et CI, ces droites seront les hauteurs des triangles correspondants : donc Fig. 260.

$$BAD : BA'D :: AK : A'K,$$

$$BCD : BC'D :: CI : C'I.$$

Mais les triangles $AA'K$ et $CC'I$ sont équiangles,

donc $$BAD : BA'D :: BCD : BC'D :: AK : A'K,$$

et partant $$BAC : BA'C' :: AK : A'K;$$

donc enfin $B'A'C' < BAC$.

Si le côté AC était parallèle au plan de projection, on mènerait ce plan par ce côté, et on rentrerait dans le premier cas.

Lemme II.

Fig. 261. **631**. *Toute surface plane* ABCDE *est moindre que toute surface polyédrale fermée qui est terminée au même contour.*

En effet, les projections sur le plan ABCDE des faces de la surface polyédrale proposée, qui ne sont pas parallèles à ce plan, sont moindres que ces faces (**630**), et la somme de ces projections est au moins égale à ABCDE (la figure représente l'intersection GHIKLMN de la surface enveloppante par un plan perpendiculaire à ABCDE).

632. Corollaire. Il suit de là et des considérations du n° **509** que *toute surface plane est moindre que toute surface terminée au même contour.*

Lemme III.

633. *Toute surface polyédrale convexe est plus petite que toute surface polyédrale qui l'envelopperait en s'appuyant sur le même contour, ou qui l'envelopperait entièrement.*

Construisons, en effet, sur chaque face de la surface convexe un prisme droit extérieur à cette surface. On pourra regarder chacune de ces faces comme la projection sur son plan de la portion de la surface enveloppante comprise dans la surface latérale du prisme correspondant. Puis donc que ces prismes ne peuvent pas s'entrecouper, puisque la surface sur laquelle ils reposent est convexe, on doit conclure du n° **630**

que cette surface est moindre que celle qui l'enveloppe (la figure représente la construction analogue exécutée pour deux lignes brisées situées dans le même plan). Fig. 262.

634. Corollaire. *Toute surface convexe est plus petite qu'une autre surface quelconque qui l'envelopperait en s'appuyant sur le même contour, ou qui l'envelopperait entièrement* [1].

635. La détermination de l'aire d'un polyèdre quelconque ne saurait présenter de difficulté, puisqu'elle est évidemment la somme de celles des faces de ce polyèdre, et nous avons vu comment on peut les évaluer. J'observerai seulement que les aires des surfaces latérales de la pyramide régulière et du prisme peuvent s'obtenir par une seule multiplication.

Théorème I.

636. *L'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière est égale à la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothême.*

En effet, chaque face de cette pyramide est un triangle qui a pour mesure un des côtés de la base de cette pyramide multiplié par la moitié de son apothême (**586**) : donc on pourra, dans l'addition des aires de toutes ces faces, mettre la moitié de l'apothême en facteur commun, et l'on obtiendra ainsi pour mesure de la surface latérale de la pyramide le périmètre de sa base multiplié par la moitié de son apothême.

Théorème II.

637. *L'aire de la surface courbe d'un cône circulaire droit est égale à la moitié du produit de la circonférence de sa base multipliée par sa génératrice,* c'est-à-dire que

$$C = \tfrac{1}{2}\, circ.\, R \times G,$$

---

[1] On aurait pu, en s'appuyant sur les considérations exposées au commencement du n° 556, démontrer d'une manière analogue le théorème du n° 346.

en désignant par R, G et C, le rayon de la base, la génératrice et l'aire de notre cône [1].

Fig. 263. Considérons, en effet, le cône engendré par la révolution du triangle rectangle SOK autour de SO.

J'inscris et je circonscris à ce cône deux pyramides régulières SABC... et SA′B′C′... dont les bases soient semblables; je représente par S et par s les aires de leurs surfaces latérales, par g l'apothême SI de la première, et enfin par P et p les périmètres de leurs bases : nous aurons donc

$$S = \frac{1}{2} P . G \text{ et } s = \frac{1}{2} p . g, \text{ d'où } \frac{S}{s} = \frac{P}{p} . \frac{G}{g}.$$

Si l'on inscrit et si l'on circonscrit à notre cône d'autres pyramides régulières dont les bases toujours semblables aient un plus grand nombre de côtés, toutes les quantités qui entrent dans ces trois équations varieront, à l'exception de G, qui est la génératrice du cône, mais ces équations subsisteront toujours. Or on peut prendre le nombre des côtés des bases assez grand pour que P et p diffèrent de moins que toute grandeur donnée. Il en sera de même de G et de g; car $G - g = SK - SI < KI$, quantité qui a zéro pour limite (349) : donc la limite du second membre de l'équation $\frac{S}{s} = \frac{P}{p} . \frac{G}{g}$, et par conséquent aussi celle du premier est l'unité; donc *la différence entre* S *et* s *peut être rendue moindre que toute grandeur assignable* [2]. Mais l'aire du cône est comprise entre S et s;

---

[1] Cela résulte de ce que l'on peut regarder un cône comme une pyramide régulière *infinitésimale*. Cette proposition résulte encore de ce que le développement de la surface courbe d'un cône droit est un secteur qui a pour rayon la génératrice de cette surface et pour base un arc égal en longueur à la circonférence de la base de ce cône (530).

[2] En effet, soit δ la différence entre S et s, de sorte que $S - s = \delta$. On tire de cette équation $\frac{S}{s} - 1 = \frac{\delta}{s}$. Or, puisque la limite de $\frac{S}{s}$ est l'unité, c'est que la différence entre ce rap-

car si l'on prolonge l'axe SO d'une quantité SO′=SO et que l'on prenne le point S′ pour le sommet d'un cône et de deux pyramides qui aient respectivement pour bases celles du cône proposé et de nos deux pyramides, il est clair que la surface 2S, enveloppant de toutes parts la double surface conique, sera plus grande qu'elle, tandis que la double surface 2*s* sera enveloppée par la double surface conique, et sera par conséquent plus petite qu'elle; donc la surface conique est comprise entre S et *s*, donc elle est leur limite commune. Puis donc que

$$S = \tfrac{1}{2}\,P.G,$$

on aura $$C = \tfrac{1}{2}.\mathit{circ.}\,R \times G,$$

car les limites de deux quantités variables, qui restent constamment égales, sont égales.

Théorème III.

638. *L'aire de la surface courbe d'un tronc de cône droit* ABA′B′ *à bases parallèles est égale au produit de la demi-somme des circonférences de ses bases par sa génératrice, ou au produit de cette génératrice par la circonférence de la section faite à égale distance de ses bases.* Fig. 237.

Coupons, en effet, le cône par un plan SAB conduit suivant son axe; par le point B menons dans ce plan sur la génératrice SB la perpendiculaire BC égale à la circonférence OB rectifiée; joignons SC, et tirons la parallèle B′C′ à BC. Je dis d'abord qu'elle sera égale à la circonférence O′B′. En effet, les deux circonférences OB et O′B′ sont proportionnelles à leurs rayons OB et O′B′, et par conséquent aux droites SB et SB′; mais ces dernières sont dans le même rapport que BC et que B′C′ : donc

$$\mathit{circ.}\,OB : \mathit{circ.}\,O'B' :: BC : B'C'.$$

---

port et l'unité peut être rendue moindre que toute quantité donnée; donc, il en est de même de δ, puisque *s* est une grandeur finie.

Or, les antécédents de cette proportion sont égaux : donc les conséquents le sont aussi ; donc B′C′ = *circ.* O′B′. Par conséquent, le triangle SB′C′ est équivalent à la surface courbe du cône SO′A′B′ (637) ; et, comme le triangle SBC est aussi équivalent à la surface latérale du cône SOAB, on en conclut que l'aire de la surface courbe du tronc de cône ABA′B′ est égale à celle du trapèze BC′ : donc l'aire de ce tronc a pour mesure $\frac{1}{2}$(BC + B′C′).BB′, ou, ce qui revient au même,

$$\tfrac{1}{2}(\textit{circ.}\ \mathrm{OB} + \textit{circ.}\ \mathrm{O'B'}).\mathrm{BB'},$$

conformément à la première partie de l'énoncé.

Si par le milieu de BB′ on mène un plan A″B″ parallèle aux bases du tronc de cône, et une parallèle B″C″ à celles du trapèze, on verra facilement que B″C″ = *circ.* O″B″ ; et, comme le trapèze BC′ a pour mesure B″C″.BB′, on en conclut encore que l'aire de la surface convexe du tronc de cône est égale à *circ.* O″B″.BB′, ce qui s'accorde avec l'énoncé.

Théorème IV.

639. *L'aire de la surface latérale d'un prisme quelconque est égale au produit de l'une de ses arêtes multipliée par le périmètre de la* SECTION DROITE, c'est-à-dire de la section faite dans ce prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes.

En effet chaque côté de la section droite peut être regardé comme la hauteur de la face correspondante du prisme, en prenant pour bases de cette face les deux arêtes qui la limitent latéralement : donc, etc.

Théorème V.

640. *L'aire de la surface courbe d'un cylindre circulaire quelconque est égale à la circonférence de la section droite multipliée par sa génératrice* [1].

[1] Cela résulte de ce que l'on peut regarder un cylindre

Répétez ici la démonstration que nous avons donnée pour le cône au n° **637**, en remplaçant les pyramides par des prismes inscrits et circonscrits au cylindre proposé. Seulement il faudra démontrer que *les surfaces latérales des prismes inscrits et circonscrits au cylindre sont respectivement moindres et plus grandes que celle de ce cylindre*, ce que l'on peut faire de la manière suivante :

1° Soient ABCD une des faces du prisme inscrit et AEBDFC le fuseau cylindrique correspondant; si la première de ces deux surfaces n'est pas plus petite que la seconde, elle sera plus grande qu'elle ou elle lui sera égale. Supposons ABCD>AEBDFC et appelons M la différence de ces deux aires. Si l'on prend sur le prolongement de l'axe GI une longueur GO qui soit égale à n fois GI, et que par le point O on mène un plan parallèle à celui des bases, il est clair que le fuseau AEBKML et le rectangle AK seront n fois plus grands que le fuseau AEBDFC et que le rectangle AC; donc leur différence sera n fois M. Or, n étant un nombre entier arbitraire et M une aire donnée, on peut prendre n assez grand pour que nM soit plus grand que la somme des deux segments circulaires AEBA et KMLK, de sorte que l'on aura Fig. 264.

$$\text{ABKL}-\text{AEBKML}>\text{AEBA}+\text{KMLK},$$

d'ou $\text{ABKL}>\text{AEBKML}+\text{AEBA}+\text{KMLK},$

c'est-à-dire que la surface plane ABKL serait plus grande que la surface formée du fuseau cylindrique AEBKML et des segments AEBA et KMLK, laquelle est terminée au même contour, ce qui ne se peut. Donc on ne peut pas avoir ABCD>AEBDFC.

Supposons actuellement que ABCD=AEBDFC;

---

comme un prisme régulier infinitésimal. Cette proposition résulte encore de ce que le développement de la surface courbe d'un cylindre droit est un rectangle de même hauteur que ce cylindre, et dont la base est égale en longueur à la circonférence de la base du cylindre (537).

tirons les cordes AE et EB, DF et FC; il est clair que puisque les trois rectangles AF, ED et AD ont même hauteur et que la somme des bases des deux premiers est plus grande que la base du troisième, la somme de ces deux premiers rectangles sera plus grande que le troisième, c'est-à-dire que le fuseau AEBCFD; donc le rectangle AF serait plus grand que la moitié de AEBCFD, c'est-à-dire que le fuseau cylindrique qu'il sous-tend, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. Donc le rectangle ABCD ne peut pas être ni égal au fuseau ABDCFD ni plus grand que lui; donc il est plus petit; donc la surface latérale du prisme inscrit à un cylindre est plus petite que la surface courbe de ce cylindre.

2° La surface latérale du prisme circonscrit à un cylindre est plus grande que celle de ce cylindre, ce qui revient à prouver que l'aire du rectangle A'B'D'C' est plus grande que celle du fuseau AEBDFC. Par un raisonnement semblable au précédent, on prouvera facilement que, si $A'B'D'C' < AEBDFC$, on pourra, en répétant ces deux surfaces un nombre convenable de fois, faire que l'on ait

$$AEBKML - A'B'D'C' > 4AEA'A,$$

et par conséquent

$$AEBKML > A'B'D'C' + AEA'A + BEB'B + KMK'K + LML'L,$$

ce qui est contraire à la propriété énoncée au n° **654**. Donc A'B'D'C' n'est pas plus petit que AEBDFC.

Si $A'B'D'C' = AEBDFC$, on tirera une tangente à l'arc AEB au point A, on mènera un plan par cette droite et par AC, et en s'appuyant sur ce que la ligne brisée $ANE < A'E$, on sera conduit à conclure que le rectangle ANPC est plus petit que le fuseau cylindrique correspondant, ce qui est contraire à ce que l'on vient d'établir.

Théorème VI.

641. *L'aire de la surface courbe d'un tronc de*

cylindre circulaire droit a pour mesure la circonférence de sa base multipliée par son axe.

Car, si l'on prolonge l'axe du tronc d'une quantité égale à lui-même, et que, par son extrémité, on mène un plan parallèle à la base inférieure de ce tronc, on formera un cylindre droit que le plan de la base supérieure du tronc partagera en deux parties superposables : donc, etc.

Théorème VII.

642. *L'aire de la surface engendrée par la base* BC *d'un triangle isocèle qui tourne autour d'un axe fixe* XY, *mené dans son plan par son sommet* A, *est* Fig. 265.
égale au produit de la circonférence qui a pour rayon la hauteur AM *de ce triangle, multipliée par la projection* B′C′ *de sa base sur l'axe de révolution.*

Il est clair que dans le mouvement de rotation du triangle ABC autour de l'axe XY, supposé extérieur à ce triangle, le trapèze BC′ engendrera un tronc de cône, de sorte que la surface courbe produite par BC est précisément la surface courbe de ce tronc : ainsi son aire A a pour expression (**638**).

$$A=2\pi.MM'.BC\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Mais si l'on mène par le point C la parallèle CI à l'axe de révolution, on formera le triangle BCI semblable à AMM′ (**251**) : donc leurs côtés homologues nous donneront la proportion (**252**)
AM : BC :: MM′ : CI ou B′C′; d'où MM′.BC=AM.B′C′: donc, en substituant dans (1),

$$A=2\pi.AM.B'C'.$$

Or, cette mesure est indépendante de la grandeur de l'angle CAY : donc elle reste la même, soit que l'axe XY coïncide avec le côté AC, ou qu'il soit parallèle à la base BC; donc notre théorème est démontré dans tous les cas (**640**).

Théorème VIII.

Fig. 266. **643**. *L'aire de la surface engendrée par une ligne brisée régulière* ABCDE *qui tourne autour d'un axe mené dans son plan par le centre de la circonférence qui lui est inscrite, est égale au produit de cette circonférence par la projection* A′E′ *de la génératrice sur l'axe de révolution.*

En effet, en tirant les rayons OA, OB, OC,... on formera une série de triangles isocèles qui tourneront chacun autour d'un axe passant par son sommet, et il n'y a plus alors qu'à répéter le raisonnement du n° **636**, en s'appuyant sur le théorème VII.

Théorème IX.

644. *L'aire de la calotte sphérique a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle multipliée par sa hauteur,* c'est-à-dire que

$$C = 2\pi R h,$$

en désignant par R, h et C le rayon, la hauteur et l'aire de cette calotte [1].

Fig. 267. Considérons, en effet, la calotte engendrée par la révolution de l'arc AB autour du diamètre AG : j'inscris et je circonscris à cet arc deux lignes brisées régulières d'un même nombre de côtés ADEFB et A′D′E′F′B′. Je représente par A et par A′ les aires des surfaces de révolution engendrées par ces lignes, en tournant autour du diamètre AG, par r l'apothême AI de la première, et par h' la projection A′C′ de la seconde sur l'axe : nous aurons donc (**643**)

$$A' = 2\pi R h',\ A = 2\pi r h,\ \text{d'où}\ \frac{A'}{A} = \frac{R}{r}\cdot\frac{h'}{h}.$$

Si l'on inscrit et si l'on circonscrit à l'arc AB d'au-

---

[1] Si l'on fait tourner un secteur circulaire autour de l'un des rayons qui le limitent, sa base engendrera une calotte sphérique ; or cette base peut être regardée comme une ligne brisée régulière dont les côtés sont infiniment petits : donc, etc.

tres lignes brisées d'un plus grand nombre de côtés, mais qui en aient toujours chacune le même nombre, et qu'on les fasse encore tourner autour du diamètre AG, toutes les quantités qui entrent dans ces trois équations varieront, à l'exception de R, qui est le rayon de l'arc AB, mais ces équations subsisteront toujours. Or, on peut prendre le nombre des côtés des deux lignes brisées assez grand pour que R et r diffèrent de moins que toute grandeur donnée (**349**). Il en sera de même de h' et de h; car $h'-h = A'C'-AC = A'A + C'C = BB' + CC'$, quantité qui peut être rendue aussi petite que l'on voudra; car B'B, et *à fortiori* CC', ont zéro pour limite ([1]). Donc la limite du second membre de l'équation $\frac{A'}{A} = \frac{R}{r} \cdot \frac{h'}{h}$, et par conséquent aussi celle du premier est l'unité; donc *la différence entre* A' *et* A *peut être rendue moindre que toute grandeur assignable.* Cela posé, je dis que l'aire de la calotte est comprise entre A' et A. D'abord elle est plus grande que A; car ce sont deux surfaces terminées au même contour, et A est convexe. Elle est moindre que A'; car si l'on mène au point B la tangente BK, il est clair que la surface engendrée par A'D'E'F'KB sera plus grande que la calotte (**634**). Or, cette surface A'D'E'F'KB est plus petite que A'. En effet, ces deux surfaces ont une partie commune produite par la révolution de la ligne brisée A'D'E'F'K; les aires des troncs de cône engendrés par KB et KB' sont respectivement égales à $\pi(KL + BC) . KB$ et à $\pi(KL + B'C') . KB'$; mais la comparaison des triangles OBC et OB'C' prouve que $BC < B'C'$: d'un autre côté $KB < KB'$ (**32**); donc la surface engendrée par KB est moindre que celle engendrée par KB'; donc la surface produite par A'D'E'F'B' sur-

---

([1]) $BB' = OB' - OB = OB' - OM < B'M$, et CC' perpendiculaire aux deux parallèles BC et B'C' est plus petite que BB' oblique à ces droites.

passe celle qui est produite par $A'B'C'D'F'KB$; donc l'aire de la calotte est comprise entre A et A'; donc elle est leur limite commune. Puis donc que

$$A' = 2\pi R h',$$

on aura

$$C = 2\pi R h;$$

car les limites de deux quantités variables, qui restent constamment égales, sont égales; donc enfin *l'aire d'une calotte est égale à la circonférence d'un grand cercle multipliée par sa hauteur* (1).

645. COROLLAIRE I. *L'aire d'une zone quelconque* NEBC *est aussi égale à la circonférence d'un grand cercle multipliée par sa hauteur* CN; car elle est la différence des deux calottes AEN et ABC, et ainsi elle a pour mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée par (AC — AN), c'est-à-dire par NC.

646. COROLLAIRE II. *Dans une même sphère, ou dans des sphères égales, les aires des calottes et des zones sont proportionnelles à leurs hauteurs.*

647. COROLLAIRE III. *L'aire de la sphère est égale à la circonférence d'un grand cercle multipliée par son diamètre* (2), car on peut la regarder comme une calotte dont la hauteur est égale à ce diamètre.

Comme le diamètre est quadruple de la moitié du rayon, il suit du n° **380** que *l'aire de la sphère est quadruple de celle d'un grand cercle* (3).

---

(1) Si l'on observe que $\overline{AB}^2 = 2\,AO.AC$, on verra que *l'aire de la calotte* ABC *a pour mesure* $\pi\,\overline{AB}^2$, c'est-à-dire qu'elle *est égale à celle d'un cercle qui a pour rayon la corde qui sous-tend son arc générateur.*

(2) Ainsi *l'aire de la sphère est les* $\frac{4}{6}$ *ou les* $\frac{2}{3}$ *de celle de la surface totale du cylindre circonscrit :* car celle-ci vaut six fois celle de sa base, c'est-à-dire celle d'un grand cercle de la sphère.

(3) Ainsi *l'aire de la sphère est égale à celle de la surface latérale du cylindre circonscrit.*

THÉORÈME X.

648. *L'aire du fuseau* CNDGC *est égale au quart de celle de la sphère multiplié par l'angle dièdre formé par les plans des deux demi-circonférences qui le terminent.* Fig. 240.

Décrivons, en effet, du point C comme pôle, et avec une ouverture de compas égale à un quadran, la circonférence de grand cercle FNGF, et il sera facile de voir, en raisonnant comme au n° **108**, que l'*aire* F *du fuseau* EST *à celle* S *de la sphère* COMME *l'arc* NG EST *à la circonference* ON; car deux fuseaux qui interceptent sur cette circonférence des arcs égaux sont évidemment superposables, et ainsi

$$F : S :: NG : circ.\,ON : \text{d'où } F = S.\frac{NG}{circ.\,ON}.$$

Mais au rapport de l'arc NG à la circonférence ON, on peut substituer celui de l'angle dièdre GCDN à quatre angles dièdres droits (**484**) : donc, si l'on prend l'angle dièdre droit pour unité, et que l'on représente par A la mesure de l'angle dièdre GCDN, on aura

$$F = S.\,\frac{A}{4}, \text{ ou } F = \frac{S}{4}.\,A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

649. SCHOLIE. *Si l'on prend le triangle sphérique trirectangle pour unité,* l'aire de la sphère vaudra *huit* unités : de sorte que celle du fuseau deviendra $F = 2A$, c'est-à-dire qu'alors l'*aire du fuseau aura pour mesure le double de son angle.*

Si l'on observe que $S = circ.ON.CD$ (**647**), on aura : $F = NG.CD$. Ainsi l'on peut dire encore que l'*aire du fuseau a pour mesure le produit du diamètre multiplié par l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme pôle.*

THÉORÈME XI.

650. *Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents.*

Fig. 268. Soient ABC et $A'B'C'$ les deux triangles proposés : les triangles rectilignes formés par les cordes qui sous-tendent leurs côtés étant équilatéraux entre eux, on pourra les faire coïncider, et par conséquent les pôles P et P' des cercles circonscrits à ces triangles [1] seront situés de la même manière à l'égard des triangles sphériques proposés l'un au-dessus, l'autre au-dessous du plan commun, et à égales distances des deux circonférences. Si donc on joint ces pôles au sommet des deux triangles ABC et $A'B'C'$ par des arcs de grand cercle, ces six arcs PA, PB, PC, P'A', P'B', P'C' seront tous égaux. Par conséquent, les triangles PAB et P'A'B', PAC et P'A'C', PBC et P'B'C', ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun; mais ils sont isocèles : donc ils sont superposables; donc les aires des triangles proposés seront formées de la même manière avec celles des triangles auxiliaires, donc elles seront égales.

Théorème XII.

651. *L'aire d'un triangle sphérique est égale à l'excès de la somme de ses angles sur deux droits, en prenant pour unité celle du triangle trirectangle.*

Achevons, en effet, les circonférences dont les trois
Fig. 242. côtés de notre triangle ABC font partie, et l'on verra que les deux triangles ABC et BCA' composent le fuseau ACA'BA; qu'ainsi (**649**)

$$ABC + BCA' = 2A.$$

De même $$ABC + ACB' = 2B.$$

La somme des deux triangles A'B'C et A'B'C' forme le fuseau CA'C'B'C; mais le triangle A'B'C' est équivalent (**651**) à son symétrique ABC [2] : donc

[1] Ce sont des petits cercles, car si c'était des grands cercles, les trois côtés de chacun de nos triangles étant situés dans un même plan, ces triangles deviendraient des cercles.

[2] En effet, les trois droites AA', BB' et CC', sont trois diamètres de la sphère (552, 2°) ; de sorte que les deux triangles

$$ABC + A'B'C = 2C.$$

Si maintenant on additionne ces trois équations, on verra que la somme de leurs premiers membres se compose de deux fois le triangle ABC, et des quatre triangles ABC, BCA', ACB' et A'B'C qui forment l'hémisphère CABA'B', lequel vaut quatre triangles trirectangles, c'est-à-dire *quatre unités ;* donc on aura :

$$2ABC + 4 = 2A + 2B + 2C;$$

d'où $$ABC = A + B + C - 2.$$

Ainsi *un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur deux droits,* c'est-à-dire le rapport de cet excès à l'angle droit.

Exemple. *Quelle est l'aire d'un triangle dont les angles valent respectivement* 120° 10', 95° *et* 48°? L'excès de la somme des mesures de ces angles sur celle de deux droits est 83° 10' : ainsi il faut prendre le rapport de cet arc à la mesure d'un droit, c'est-à-dire à 90°, ce qui se fera en convertissant ces deux nombres en minutes. On trouvera ainsi que le triangle proposé est les $\frac{4990}{5400} = \frac{499}{540}$ du triangle trirectangle.

652. Corollaire. Si l'on observe que le triangle trirectangle est le huitième de la surface sphérique, on pourra dire que *l'aire d'un triangle sphérique est égale au huitième de celle de la sphère multiplié par l'excès de la somme de ses angles sur deux droits.*

Théorème XIII.

653. *L'aire d'un polygone sphérique convexe dont tous les côtés sont des arcs de grand cercle est égale à la somme de ses angles diminuée d'autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux.*

ABC et A'B'C' sont interceptés par deux trièdres dont les arètes de l'un sont les prolongements de celles de l'autre : ils sont donc bien symétriques.

En effet, si du sommet de l'un des angles on mène des arcs de grand cercle à tous les sommets des angles non adjacents à celui-ci, on décomposera le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux; donc son aire sera égale à l'excès de la somme des angles de tous ces triangles sur autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux; mais la somme des angles de tous ces triangles est égale à la somme même des angles de notre polygone; donc *son aire est égale*, etc.

CHAPITRE II.

DE LA COMPARAISON DES AIRES DES CORPS SEMBLABLES.

THÉORÈME I.

654. *Les aires des surfaces courbes de deux cônes droits, de deux troncs de cônes droits, de deux cylindres droits* SEMBLABLES (ces corps sont dits semblables lorsqu'ils sont engendrés par des figures semblables), *sont proportionnelles aux carrés de leurs génératrices ou des rayons de leurs bases.*

Soient, en effet, T et T′, G et G′, R et R′, r et r', les aires, les génératrices et les rayons des bases inférieures et supérieures de deux troncs de cône droits semblables. On aura (**638**) :

$$T : T' :: (R + r)G : (R' + r')G' \dots (1).$$

Mais, parce que ces deux troncs sont semblables,

$$R : R' :: r : r' :: G : G';$$

par conséquent

$$R + r : R' + r' :: G : G' \dots (2);$$

donc, en multipliant par ordre les proportions (1) et (2), et simplifiant la proportion-produit,

$$T : T' :: G^2 : G'^2, \text{ et partant } :: R^2 : R'^2 :: r^2 : r'^2.$$

Mais les troncs deviennent des cônes ou des cylindres suivant que r et r' sont nuls, ou que r et r' sont respectivement égaux à R et à R' : donc le théorème est démontré.

Théorème II.

653. *Les aires de deux calottes, de deux zones, de deux sphères, de deux fuseaux et de deux triangles sphériques* SEMBLABLES (deux calottes, deux segments sont semblables lorsqu'ils correspondent à des surfaces coniques égales; deux zones sont semblables quand elles sont des différences de calottes semblables; deux fuseaux ou deux triangles sphériques sont semblables lorsqu'ils correspondent à des angles dièdres ou trièdres égaux) *sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

1° Soient C et C', R et R', h et h' les aires, les rayons et les hauteurs de deux calottes semblables. On aura (**644**):

$$C : C' :: R.h : R'.h' \ldots\ldots (1).$$

Mais, d'après la définition des calottes semblables, les deux triangles BOC et B'O'C' sont semblables (**249**), Fig. 269.
et ainsi

$$R : R' :: OC : O'C';$$

d'où, *dividendo,*

$$h : h' :: R : R' \ldots\ldots (2).$$

Donc, en multipliant par ordre les proportions (1) et (2), et simplifiant,

$$C : C' :: R^2 : R'^2, \text{ et partant } :: h^2 : h'^2.$$

2° Cette démonstration est indépendante des hauteurs des deux calottes, et convient ainsi à deux hémisphères, et par conséquent à deux sphères. Au reste il est évident que les aires de deux sphères sont entre elles comme $4\pi R^2 : 4\pi R'^2$ ou $:: R^2 : R'^2$.

3° Soient Z et Z' les aires de deux zones semblables, et C et c, C' et c', celles des calottes semblables dont elles sont les différences. On aura :

$$C : C' :: R^2 : R'^2 :: c : c';$$

d'où $C - c$ ou $Z : C' - c'$ ou $Z' :: R^2 : R'^2$.

4° Enfin, il suit des théorèmes des nos **648** et **652** que les aires de deux fuseaux ou de deux triangles sphériques semblables sont proportionnelles à celles des sphères dont ils font partie, et le sont, par conséquent, aux carrés de leurs rayons.

Théorème III.

656. *Les aires de deux polyèdres semblables quelconques sont proportionnelles aux carrés de leurs lignes homologues.*

Pour le démontrer, il n'y aura qu'à comparer chaque face de l'un avec la face semblable de l'autre, comme on l'a fait au n° **398** pour les triangles semblables dans lesquels on avait décomposé les deux polygones proposés.

LIVRE X.

DES VOLUMES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA MESURE DES VOLUMES.

657. Le volume *d'un corps est la portion de l'espace renfermée par la surface de ce corps. Pour mesurer le volume d'un corps, on cherche le rapport de ce volume à un autre que l'on prend pour unité. Nous prendrons désormais pour unité de volume celui du cube dont l'arête est égale à l'unité linéaire,* de sorte que *la mesure du volume d'un corps sera le rapport de son volume à celui du cube qui a pour côté l'unité de longueur.*

Théorème I.

658. *Les volumes de deux parallélipipèdes rectangles* AC *et* FI (¹) *de même base sont proportionnels à leurs hauteurs* AD *et* FK. Fig. 270.

Répétez la démonstration même du n° **359**, en menant, par les points de division des hauteurs, des plans parallèles aux bases.

Théorème II.

659. *Les volumes de deux parallélipipèdes rectangles de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.*

Désignons, en effet, par P et P′ les volumes de deux

(¹) Désormais nous conviendrons, pour abréger, de désigner un parallélipipède par les lettres placées à deux sommets opposés.

parallélipipèdes, par e et l, par e' et l', les deux côtés contigus de leurs bases respectives. Construisons un troisième parallélipipède rectangle P″ de même hauteur h que les deux premiers, et qui ait en outre même épaisseur e que le premier, et même largeur l' que le second. Cela posé, si l'on compare les deux parallélipipèdes P et P″, et qu'on prenne pour base la face qui, dans chacun, a pour côtés contigus e et h, on verra que l et l' seront alors leurs hauteurs, et qu'ainsi (**657**)

$$P : P'' :: l : l'.$$

La comparaison du second parallélipipède avec le troisième donnera de même :

$$P'' : P' :: e : e'.$$

Donc, en multipliant ces deux proportions par ordre, et supprimant le facteur P″ commun aux deux termes du premier rapport :

$$P : P' :: l.e : l'.e',$$

ce qui démontre notre théorème.

Théorème III.

660. *Les volumes de deux parallélipipèdes rectangles sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

Même démonstration qu'au n° **361**.

Théorème IV.

661. *Le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Désignons, en effet, par P le volume du parallélipipède à mesurer, par B l'aire de sa base, et par h sa hauteur ; par C le volume du cube que l'on prend pour unité ; sa base sera donc égale à l'unité de surface, et sa hauteur à l'unité linéaire ; donc, etc. (Voyez le n° **362**).

662. La vérité de cette proposition devient évidente à l'inspection seule de la figure, lorsque les longueurs

des dimensions du rectangle sont des nombres entiers. Mais il est aussi facile de s'en assurer lorsqu'elles sont fractionnaires : car, soit le parallélipipède CE, dont les trois arêtes AB, AD et AE valent respectivement $4^{m}\frac{2}{5}$, $3^{m}\frac{1}{3}$ et $2\frac{3}{4}$. Par les points de division de chaque arête, je mène des plans parallèles à celui des deux autres, ce qui partage notre volume en mètres cubes et en parties de mètres cubes. Le parallélipipède HM est les $\frac{2}{5}$ d'un mètre cube (**657**) ; donc la tranche IABH vaut $4^{m.c}\frac{2}{5}$; donc IABK égale $4^{m.c}\frac{2}{5}.3$. Or, puisque $KC = \frac{1}{3}^{m}$, la tranche LKCD est le tiers de IABH, et vaut ainsi $4^{m.c}\frac{2}{5}.\frac{1}{3}$, de sorte que $IABCD = 4^{m.c}\frac{2}{5}.3\frac{1}{3}$, et par conséquent $OABCD = 4^{m.c}.\frac{3}{5}.3\frac{1}{3}.2$. Mais, puisque $EO = \frac{3}{4}^{m}$, on voit que la tranche OGEF est les $\frac{3}{4}$ de IABCD, et vaut ainsi $4^{m.c}\frac{2}{5}.3\frac{1}{3}.\frac{3}{4}$; donc, enfin, le parallélipipède EC vaut $4^{m.c}\frac{3}{5}.3\frac{1}{3}.2\frac{3}{4}$. Fig. 271.

663. Corollaire. Si l'on observe que l'aire de la base est égale au produit de ses arêtes contiguës, on en conclura que *le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions.*

Théorème V.

664. *Le volume d'un cube a pour mesure la troisième puissance de son arête.*

En effet, le cube étant un parallélipipède rectangle dont les trois arêtes sont égales, son volume aura pour mesure la troisième puissance de l'une d'elles [1].

665. Corollaire. En France, où l'unité linéaire est le mètre, *l'unité de volume est le* mètre cube. *Cette unité se subdivise en mille décimètres cubes, le décimètre cube vaut mille centimètres cubes, et le centimètre cube vaut mille millimètres cubes;* ainsi,

---

[1] Ainsi, lorsque l'on forme la troisième puissance d'un nombre, on exécute l'opération nécessaire pour évaluer le volume du cube dont l'arête contiendrait ce nombre-là d'unités linéaires. C'est pour cela que l'on a appelé cube d'un nombre la troisième puissance de ce nombre.

pour convertir un nombre quelconque de mètres cubes en DÉCIMÈTRES CUBES, *ou en* CENTIMÈTRES CUBES, *ou en* MILLIMÈTRES CUBES, *il suffit d'avancer la virgule de* TROIS, *ou de* SIX, *ou de* NEUF *rangs vers la droite.*

Autrefois *l'unité de volume était la* TOISE CUBE, *laquelle valait* 216 *pieds cubes. Le pied cube se composait de* 1728 *pouces cubes, et le pouce cube de* 1728 *lignes cubes.*

Lorsque les dimensions d'un parallélipipède rectangle sont exprimées en toises et fractions de toise, ce qu'il y a de mieux à faire, pour en calculer le volume, est de convertir chacune d'elles en unités du dernier ordre. Proposons-nous, par exemple, de trouver le côté d'un cube équivalent à un parallélipipède rectangle dont les trois arêtes contiguës vaudraient respectivement $2^t 3^p$, 3^t et $4^p 5^p$: on réduira ces trois nombres en pouces, et, en multipliant les résultats entre eux, on trouvera que le volume du cube équivaut à 2060640 pouces cubes [1]; de sorte qu'en extrayant la racine cubique du nombre abstrait 2060640, on aura la longueur de son arête. On trouve pour sa valeur $127^p = 1^t\,4^p\,7^p$.

Théorème VI.

Fig. 272. **666.** *Deux parallélipipèdes* AG *et* AM *sont équivalents lorsqu'ils ont une face commune* AC, *et que les faces opposées à celle-ci* EG *et* KM *sont situées dans un même plan et comprises entre les mêmes parallèles* EL *et* IM.

En effet, le prisme triangulaire EAKIDN est égal à FBLGCM; car le parallélogramme AI est égal à BG, commes faces opposées du même parallélipipède AG (590); par la même raison, AN est égal à BM;

---

(1) Si l'on veut évaluer ce volume en toises cubes et en pieds cubes, on divisera le nombre de 2060640 par 1728, puis le quotient par 216, et l'on trouvera ainsi 5 toises cubes, 112 pieds cubes, 864 pouces cubes.

de plus le triangle EAK est égal à FBL, comme ayant un angle égal (71) compris entre côtés égaux (174): donc les prismes EAKIDN et FBLGCM ont un angle trièdre compris entre trois faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées; donc ils sont égaux (599). Mais, si l'on retranche le premier du polyèdre ABCDELMI, il reste le parallélipipède AM; et, si l'on retranche le second prisme du même polyèdre, il reste le parallélipipède AG : donc ces deux parallélipipèdes sont équivalents.

Théorème VII.

667. *Deux parallélipipèdes* AG *et* AM *de même base et de même hauteur sont équivalents.* Fig. 273.

En effet, puisque ces parallélipipèdes ont la même base inférieure et la même hauteur, leurs bases supérieures EG et KM doivent se trouver dans un même plan. Si donc on prolonge les plans des faces AF et DG du premier, ainsi que les plans des faces AN et BM du second, on formera un troisième parallélipipède AR (589), qui sera équivalent à chacun des deux autres AG et AM; car ils ont tous trois la face commune AC; et les faces opposées à celle-ci PR et EG, PR et KM, sont situées dans le même plan, et comprises entre les mêmes parallèles EQ et IR, PN et QM: donc les deux parallélipipèdes AG et AM sont équivalents.

Théorème VIII.

668. *Tout parallélipipède peut être transformé en un parallélipipède rectangle de base équivalente et de même hauteur.* Fig. 272.

Soit ABFE la base du parallélipipède proposé. Menons par chacun des côtés de ce parallélogramme des plans perpendiculaires à son plan. L'espace AG, compris entre eux et les plans des bases du parallélipipède proposé, sera un parallélipipède droit (592) qui lui sera équivalent (667). Si donc la base AF était

un rectangle, le théorème serait démontré. S'il n'en est pas ainsi, menez aux points A et B les perpendiculaires AK et BL terminées au prolongement de EF, puis conduisez des plans par les droites AD et AK, BC et BL, et vous formerez ainsi un parallélipipède rectangle AM (**592**) équivalent au parallélipipède proposé (**666**), qui aura même hauteur AD que lui, et une base AL équivalente à la sienne AF (**367**).

669. Corollaire. *Le volume d'un parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur* (**661**).

Théorème IX.

670. *Tout prisme triangulaire est la moitié d'un parallélipipède de base double et de même hauteur.*

Fig. 274. Soit ABCDFG le prisme proposé. Je mène par les arêtes BF et GC des plans parallèles à ses faces respectives AG et AF, et je forme ainsi un parallélipipède AK, que le plan CF partage en deux prismes triangulaires ABCDFG et BCIGFK ([1]); donc, en démontrant qu'ils sont équivalents, j'aurai prouvé que le premier est la moitié du parallélipipède AK. Pour y parvenir, je prends sur le prolongement de l'arête AD une longueur $A'D' = AD$, puis je mène par les points D' et A' deux plans perpendiculaires à cette arête, et l'espace compris entre eux et les plans des faces latérales du parallélipipède AK, sera un parallélipipède droit $A'K'$, que le plan CF partagera en deux prismes droits égaux (**600**). Or je dis que chacun d'eux est équivalent au prisme oblique correspondant; car, si l'on porte le tronc de prisme $A'B'C'ABC$ sur $D'F'G'DFG$, on pourra évidemment faire coïncider leurs bases inférieures $A'B'C'$ et $D'F'G'$, et alors leurs arêtes latérales coïncideront aussi (**434**); mais, puisque $A'D' = AD$, on voit que $AA' = DD'$: donc le point A tombera sur D; il en sera

([1]) *Ces prismes sont* symétriques *par rapport au centre du parallélipipède* (590 *et* 620).

de même des sommets C et B à l'égard de leurs homologues G et F, de sorte que les deux polyèdres A′B′C′ABC et D′F′G′DFG se recouvriront parfaitement : donc ils sont égaux ; mais, si de chacun d'eux on retranche le tronc de prisme D′F′G′ABC, il restera d'une part le prisme droit A′B′C′D′F′G′, et de l'autre le prisme oblique ABCDFG : donc ils sont équivalents. Il en est évidemment de même de B′C′I′G′F′K′ et de BCIGFK : donc enfin les deux prismes ABCDFG et BCIGFK sont équivalents ; donc chacun d'eux est la moitié du parallélipipède AK de base double et de même hauteur.

671. Corollaire i. *Le volume de tout prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, un prisme triangulaire quelconque étant la moitié d'un parallélipipède de base double et de même hauteur, son volume aura pour mesure la moitié de la base de ce parallélipipède multipliée par sa hauteur, c'est-à-dire le produit même de sa base par sa hauteur.

672. Corollaire ii. *Le volume d'un prisme polygonal quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur;* car, si l'on partage la base ABCDE Fig. 250.
en triangles par des diagonales, et que par ces lignes et les arêtes auxquelles elles aboutissent on mène des plans, on partagera le prisme AI en prismes triangulaires qui auront même hauteur que ce prisme, et dont chacun aura pour mesure le produit de l'aire du triangle qui lui sert de base multipliée par cette hauteur. Dans l'addition de ces volumes partiels, on pourra mettre la hauteur en facteur commun, et alors on trouvera, pour l'expression du volume demandé, la somme des aires des triangles qui composent la base du prisme AI, c'est-à-dire l'aire de cette base multipliée par sa hauteur.

Théorème X.

673. *Le volume d'un cylindre droit a pour me-*

sure le produit de sa base par sa hauteur (¹), c'est-à-dire qu'en désignant par C, h et R le volume, la hauteur et le rayon de la base de ce cylindre, on aura

$$C = 2\pi R h.$$

Fig. 264. En effet, j'inscris et je circonscris au cylindre proposé deux prismes réguliers dont les bases soient semblables; je représente par V et par v leurs volumes et par B et par b les aires de leurs bases; nous aurons

$$V = Bh \text{ et } v = bh, \quad \text{d'où} \quad \frac{V}{v} = \frac{B}{b}.$$

Si l'on inscrit et si l'on circonscrit à notre cylindre d'autres prismes réguliers dont les bases toujours semblables aient un plus grand nombre de côtés, toutes les quantités qui entrent dans ces équations varieront à l'exception de h, mais ces équations subsisteront toujours. Or, on peut prendre le nombre des côtés des bases assez grand pour que B et b diffèrent de moins que toute grandeur donnée; donc la limite du second membre de l'équation $\frac{V}{v} = \frac{B}{b}$, et par conséquent aussi celle du premier est l'unité; donc *la différence entre* V *et* v *peut être rendue moindre que toute grandeur assignable;* mais le volume du cylindre est évidemment compris entre V et v; donc il est leur limite commune. Puis, donc que

$$V = B \cdot h,$$

on aura

$$C = 2\pi R h,$$

car les limites de deux quantités variables, qui restent constamment égales, sont égales.

Exemple. *Quelle est la mesure de l'effort exercé sur le piston d'une machine à vapeur, en supposant que le diamètre de ce piston ait* 5 *décimètres, et que l'on travaille sous une pression de* 3 *atmosphères?*

(¹) Cela résulte de ce qu'on peut le regarder comme un prisme infinitésimal.

L'aire du piston est $\frac{1}{4}\,25^{d.m.q}.3,142 = 19^{d.m.q},64$. Mais la pression atmosphérique est égale au poids d'une colonne d'eau de $10^{m},4$ de hauteur : donc l'effort exercé sur le piston est le poids d'une colonne d'eau dont le volume est $(19,64.10,4.3)^{d.m.c}$, c'est-à-dire qu'il est égal à $612^{k.g},69$.

674. Corollaire. *Le volume d'un tronc de cylindre circulaire droit a pour mesure le produit de sa base par son axe* (**641**).

Théorème XI.

675. *Deux tétraèdres* SABC *et* sabc *qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales* SO *et* so, *sont équivalents.* Fig. 275.

Supposons, en effet, que les deux tétraèdres ne soient pas équivalents, et que le volume du premier soit le plus grand. On pourra toujours construire sur sa base ABC, un prisme équivalent à la différence des deux volumes : car il suffira, pour avoir sa hauteur OG, de diviser cette différence par la moitié de l'aire du triangle ABC (**670**). Cela posé, partageons la hauteur SO en parties égales et plus petites que OG, de sorte qu'il tombera au moins un point de division I entre O et G, puis, après avoir placé les bases des deux tétraèdres sur un même plan, menons par tous les points I, K, L, des plans parallèles à celui-ci. Les tétraèdres seront ainsi partagés en tranches de même hauteur, et dont les bases seront équivalentes chacune à chacune (**588**). Conduisons actuellement par chacun des côtés BC, B'C', B''C'', B'''C''', des plans BE', B'E'', B''E''', B'''E^{iv}, parallèles à l'arête SA, et par les côtés *b'c'*, *b''c''*, *b'''c'''*, des plans *b'e*, *b''e'*, *b'''e''*, parallèles à l'arête *sa* ; et, de plus, par le sommet S du premier tétraèdre menons un plan parallèle à sa base [1]. Nous

[1] Les traces du plan BE' sur les faces de l'angle dièdre SA se construisent en tirant par les points B et C des parallèles BD' et CE' à SA, terminées aux prolongements de A'B' et de A'C' et la droite D'E' est sa trace sur le plan A'B'C'.

formerons ainsi deux séries de prismes, les uns plus grands, les autres plus petits que les tranches pyramidales qui leur correspondent, de sorte que la différence entre la somme des prismes circonscrits aux tranches du premier tétraèdre et celle des prismes inscrits aux tranches du deuxième surpassera la différence de ces deux tétraèdres. Mais la différence de ces deux sommes de prismes est le prisme ABCE′ : car tous les prismes circonscrits sont, à partir du deuxième A′B′C′E″, équivalents aux prismes inscrits, comme ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales chacune à chacune : donc le prisme ABCE′ doit être plus grand que le prisme équivalent à la différence des deux tétraèdres, ce qui ne se peut ; car ils ont la même base ABC, et la hauteur OI du premier est moindre que celle OG du deuxième. Donc on ne pouvait pas supposer que les deux tétraèdres SABC et *sabc* ne fussent pas équivalents : donc ils le sont.

Théorème XII.

676. *Un tronc de prisme triangulaire est la somme*
Fig. 276. *de trois tétraèdres de même base* DEF *que lui, et dont les sommets sont ceux* A, B, C, *de sa base supérieure.*

Menons, en effet, par le point A et l'arête FE, un plan dont les traces sur les faces CD et BD seront les droites AF et AE. Nous retrancherons du tronc le tétraèdre AFDE, dont la base est celle même du tronc, et qui a pour sommet l'un de ceux A de la base supérieure. Il restera alors une pyramide quadrangulaire ABCFE que l'on partagera en deux tétraèdres ACFE et ACBE, en faisant passer par ses arêtes AC et AE un plan qui coupera sa base suivant CE. On peut substituer au premier le tétraèdre CDFE : car ils ont la même base CFE et même hauteur, puisque leurs sommets A et D sont situés sur une parallèle AD au plan de cette base (**445**) ; mais on peut regarder ce tétraèdre CDFE comme ayant pour base celle même

DFE du tronc, et pour sommet celui C de sa base supérieure : ainsi, il satisfait encore aux conditions de l'énoncé.

Il ne s'agit donc plus que de prouver que le troisième tétraèdre ACBE est équivalent au tétraèdre BDFE, qui a pour base le triangle DFE, et pour sommet le troisième sommet B de la base supérieure du tronc. Or, la chose est manifeste : car, si l'on considère le tétraèdre BDFE comme ayant pour base le triangle BFE, et pour sommet le point D, on reconnaîtra que sa base est équivalente à celle du tétraèdre ACBE (**370**), et qu'il a même hauteur que lui, puisque leurs sommets D et A sont sur une parallèle au plan de ces bases.

677. Corollaire i. Comme cette démonstration est tout à fait indépendante de l'inclinaison mutuelle des plans ABC et DEF, on voit qu'elle convient au cas où ces plans sont parallèles, c'est-à-dire au cas où le polyèdre ABCDEF est un prisme. Mais alors les trois tétraèdres dont il est la somme sont équivalents (**675**) : donc chacun d'eux est alors le tiers de ce prisme ; donc *un tétraèdre est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur, et, par conséquent, son volume a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

678. Corollaire ii. *Le volume d'une pyramide quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.* (Répéter ici le raisonnement du n° **672**.)

679. Corollaire iii. *Deux pyramides symétriques sont équivalentes :* car, en prenant le plan de la base de l'une pour plan de symétrie, il devient alors évident qu'elles ont des hauteurs égales (**625**).

680. Corollaire iv. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base inférieure par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées sur cette base des sommets de l'autre.* On le reconnaît en additionnant les volumes

des trois tétraèdres qui le composent, et mettant la base en facteur commun.

On peut dire aussi qu'*un tronc de prisme triangulaire a pour mesure l'aire de sa section droite, multipliée par le tiers de la somme de ses arêtes latérales.*

En effet, la section droite partage le tronc en deux parties qui, étant des troncs de prismes droits, ont chacun pour mesure l'aire de cette section multipliée par le tiers de la somme de ses arêtes latérales, donc, etc.

Théorème XIII.

681. *Le volume d'un cône quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur*(1). (Répéter la démonstration du n° **673**.)

Théorème XIV.

682. *Un tronc de pyramide à bases parallèles est la somme des trois pyramides de même hauteur que lui, et dont les bases respectives seraient les deux bases du tronc et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

Fig. 277. Soit TGHIKL une pyramide quelconque. Transformons sa base en un triangle DEF, et construisons sur ce triangle un tétraèdre de même hauteur que la pyramide. Alors, si, ayant placé les deux bases sur un même plan, on coupe les deux polyèdres par un plan parallèle à celui-là, on déterminera deux sections MNOPQ et ABC qui seront équivalentes : car elles sont proportionnelles aux bases. Les deux pyramides retranchées sont donc équivalentes, puisqu'elles ont même hauteur et des bases équivalentes. Mais les pyramides totales le sont aussi par la même raison : donc les deux troncs sont équivalents; et, comme ils ont

(1) Cela résulte de ce qu'on peut regarder un cône comme une pyramide infinitésimale.

même hauteur et des bases équivalentes, on voit que, si l'on peut démontrer le théorème pour le tronc de pyramide triangulaire, il le sera aussi pour le tronc de pyramide polygonale.

Menons un plan par le point A et par l'arête FE, et nous retrancherons du tronc ABCDEF le tétraèdre ADFE qui a pour base la base inférieure du tronc et même hauteur que lui, puisque son sommet A est un de ceux de la base supérieure. Il restera alors la pyramide quadrangulaire ABCFE, que l'on partagera en deux tétraèdres ACFE et ABCE, en faisant passer un plan par ses arêtes AC et AE. Le second a pour base la base supérieure du tronc, et même hauteur que lui, puisque son sommet E est un de ceux de la base inférieure : ainsi, nous avons déjà deux des trois pyramides dont il s'agit.

Or, si l'on prend FG = CA, et que par le point G et la droite CE on mène un plan, dont les traces sur les faces SFD et FDE seront CG et GE, on formera un tétraèdre CFGE, que l'on pourra substituer au troisième tétraèdre ACFE : car ils ont la même base CFE, et leurs sommets G et A sont situés sur une parallèle au plan de cette base. Mais en prenant le point C pour sommet de CFGE, ce tétraèdre a même hauteur que le tronc : si donc on peut prouver que sa base FGE est moyenne proportionnelle entre celles de ce tronc, le théorème sera démontré. Pour le faire voir, je prends FI = CB, et je joins GI, ce qui forme le triangle FGI égal à ABC (**159**). Or, les deux triangles FGI et FGE ont leurs bases FI et FE en ligne droite, et leurs sommets au même point G : donc ils ont même hauteur; donc ils sont entre eux comme leurs bases (**371**); donc

FGI ou ABC : FGE :: FI ou BC : FE.

La comparaison des triangles FGE et FDE donne semblablement :

FGE : FDE :: FG ou AC : FD.

Mais les triangles semblables (250) ABC et FDE ont leurs côtés homologues proportionnels : ainsi le rapport de BC à FE est égal à celui de AC à FD ; donc, les seconds rapports de nos deux proportions étant égaux, les premiers le sont donc aussi, et l'on a par conséquent :

$$ABC : FGE :: FGE : FDE,$$

ce qui prouve que le triangle FGE est moyen proportionnel entre les deux bases du tronc, et achève de démontrer notre théorème [1].

---

[1] On peut démontrer ce théorème de la manière suivante qui est très simple.

Désignons par A^2 et par a^2 les aires de deux carrés équivalents aux bases du tronc, par H et par h les hauteurs des pyramides dont il est la différence, par V et par v les volumes de ces pyramides et par k la hauteur du tronc : on aura

$$V = \tfrac{1}{3} A^2 H \text{ et } v = \tfrac{1}{3} a^2 h, \text{ d'où } V - v = \tfrac{1}{3} (A^2 H - a^2 h).$$

Mais en vertu du théorème du n° 587, on a

$$A^2 : a^2 :: H^2 : h^2 \text{ et partant } A : a :: H : h,$$

proportion de laquelle on tire

$$A - a : H - h :: A : H = \frac{A k}{A - a},$$

$$:: a : h = \frac{a k}{A - a}.$$

En substituant ces valeurs de H et de h dans l'expression du volume du tronc, il viendra, en mettant $\frac{k}{3}$ en facteur commun,

$$V - v = \frac{k}{3} \cdot \frac{A^3 - a^3}{A - a}.$$

Si l'on affectue la division de $(A^3 - a^3)$ par $(A - a)$, on trouvera :

$$V - v = \frac{k}{3} (A^2 + A a + a^2),$$

ou, ce qui revient au même,

$$V - v = \tfrac{1}{3} A^2 k + \tfrac{1}{3} a^2 k + \tfrac{1}{3} A a k,$$

et cette formule est l'expression de notre théorème, car $A a$ est une moyenne proportionnelle entre A^2 et a^2.

683. Corollaire I. *Le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles a pour mesure le produit de sa hauteur par la somme faite de ses deux bases et de leur moyenne proportionnelle.*

Théorème XV.

684. *Un tronc de cône à bases parallèles est la somme de trois cônes de même hauteur que lui, et dont les bases respectives seraient les bases mêmes du tronc et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

Pour le démontrer, il n'y aura qu'à construire un tétraèdre de même hauteur que le cône d'où provient le tronc et dont la base soit équivalente à celle de ce cône. Il sera facile de reconnaître, en raisonnant comme dans le premier paragraphe de la démonstration du théorème XIV, que le tronc de cône est équivalent à un tronc de pyramide triangulaire de même hauteur et dont les bases seront équivalentes aux siennes, de sorte que le théorème étant vrai pour un tronc de pyramide triangulaire, le sera aussi pour un tronc de cône [1].

Si le tronc de cône est circulaire, et qu'on désigne par h sa hauteur, par R et par r les rayons de ses bases, on trouvera facilement que la mesure de son volume a pour expression :

$$\frac{1}{3}\pi h(\mathrm{R}^2 + r^2 + \mathrm{R}r).$$

Ainsi *le volume d'un tronc de cône circulaire à bases parallèles a pour mesure le tiers du produit du rapport de la circonférence au diamètre multiplié par sa hauteur, et encore par la somme faite des carrés des rayons de ses bases et de leur produit.*

Théorème XVI.

685. *Le volume d'un tronc de parallélipipède a pour mesure le produit de sa base inférieure par le*

---

[1] Il sera encore plus simple d'appliquer ici la démonstration donnée dans la note [1] du n° 682.

quart de la somme des perpendiculaires abaissées sur cette base des sommets de l'autre.

Fig. 278. Désignons par a, b, c, d, les perpendiculaires abaissées des sommets respectifs A, B, C, D, de la base supérieure sur la base inférieure, et représentons l'aire de celle-ci par B. Cela posé, si nous menons un plan par les deux arêtes opposées AE et CG, nous décomposerons le tronc de parallélipipède en deux prismes triangulaires tronqués dont les mesures seront respectivement

$$\frac{B}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}, \text{ et } \frac{B}{2}\cdot\frac{a+c+d}{3}.$$

Si nous conduisons de même un plan par les deux arêtes BF et DH, nous décomposerons notre tronc en deux nouveaux prismes tronqués dont les volumes auront pour mesures

$$\frac{B}{2}\cdot\frac{a+b+d}{3} \text{ et } \frac{B}{2}\cdot\frac{b+c+d}{3}.$$

Si nous ajoutons ces quatre produits, nous aurons évidemment le double du volume V du tronc de parallélipipède : donc, en mettant $\frac{B}{2}$ en facteur commun, il viendra

$$2V=\frac{B}{2}(a+b+c+d):$$

car chacune des perpendiculaires a, b, c, d, est répétée *trois* fois. En divisant par 2, on aura enfin

$$V=\frac{B}{4}(a+b+c+d), \text{ ou } V=B.\frac{a+b+c+d}{4},$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut dire aussi qu'*un tronc de parallélipipède a pour mesure l'aire de sa section droite multipliée par le quart de la somme de ses arêtes latérales* (**680**).

PROBLÈME I.

686. *Calculer le volume d'un polyèdre quelconque.*

Il n'y aura qu'à décomposer ce polyèdre en pyramides, et évaluer le volume de chacune d'elles.

Mais la nature du polyèdre proposé fournit souvent des moyens plus simples d'en obtenir le volume. Supposons, par exemple, qu'on demande le volume compris entre deux murs en talus terminés chacun par un plan perpendiculaire à sa direction, et soient ABCFED Fig. 279.
et A'B'C'F'E'D' les plans inférieur et supérieur de ces murs. Le plan EBE'B' partage le volume demandé en deux troncs de prisme droits FC'B'E et DA'B'E, faciles à mesurer, en les décomposant en troncs de prismes triangulaires. En désignant par a, b, a', b', c, c', et h les arêtes BC, EF, B'C', E'F', CF, C'F' et FF', on trouvera pour le premier tronc FC'B'E :

$$V = \frac{h}{6}\{c'(a+a'+b')+c(a+b+b')\}.$$

Si, au lieu de considérer le volume proposé, on considère un hexaèdre symétrique par rapport à deux plans rectangulaires, il n'y aura qu'à faire dans cette formule $a'=b'$, $a=b$, et regarder c et c' comme les largeurs des faces CE et C'E' et h comme la distance de leurs plans, et on trouvera

$$V = \frac{h}{6}\{c'(2a'+a)+c(2a+a')\}.$$

Si $c'=0$, elle se réduit à $V = \frac{ch}{6}(2a+a')$.

Ces formules serviront à calculer les capacités des fossés.

Théorème XVII.

687. *Le volume engendré par la révolution d'un triangle autour d'un axe mené dans son plan et par son sommet, a pour mesure le produit de l'aire engendrée par la base du triangle multipliée par le tiers de sa hauteur.*

Il peut arriver trois cas, suivant que l'axe de révolution coïncidera avec un des côtés du triangle, qu'il rencontrera sa base, ou qu'il lui sera parallèle :

1° Supposons que le triangle ABC tourne autour de
Fig. 280. son côté AC : il est clair que le volume V qu'il engendrera sera la somme des cônes produits par la rotation des triangles ABB′ et BCB′; mais, comme ils ont la même base, on voit que la somme de leurs volumes est égale au tiers du produit de cette base par la somme de leurs hauteurs AB′ et B′C : donc

$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{BB'}^2 . AC.$$

Or, l'aire A de la surface engendrée par BC a pour expression (**637**)

$$A = \pi BB' . BC;$$

d'un autre côté, la similitude des triangles AMC et BCB′ (**249**) donne la proportion

$$AM : BB' :: AC : BC; \text{ d'où } BB'.AC = BC.AM;$$

et, par conséquent, en multipliant les deux membres de cette dernière égalité par $\frac{1}{3}\pi BB'$,

$$\frac{1}{3}\pi\overline{BB'}^2 . AC = \frac{1}{3}\pi BB'.BC.AM.$$

Mais le premier membre de cette équation est la mesure du volume cherché V, le produit π BB′. BC est celle de l'aire A engendrée par BC; donc nous aurons enfin, en remplaçant,

$$V = \frac{1}{3} A.AM, \text{ ou } V = A.\frac{1}{3}AM,$$

conformément à l'énoncé.

2° Supposons maintenant qu'il s'agisse du triangle ABD tournant autour de AC. Le volume demandé sera alors la différence des volumes engendrés par les triangles ABC et ADC; et, comme chacun a pour mesure le produit de l'aire de la surface décrite par sa base, multipliée par le tiers de la hauteur commune AM, on voit que la mesure que l'on cherche est encore égale à la différence des aires de ces deux surfaces, c'est-à-dire à l'aire engendrée par BD, multipliée par le tiers de AM.

Fig. 281. 3° Les cônes engendrés par les triangles BAB′ et DAD′ sont les tiers respectifs des cylindres AMBB′

et AMDD′ : donc leur somme est le tiers du cylindre BDD′B′, et, par conséquent, le volume engendré par le triangle ABD est les deux tiers de celui de ce cylindre; ainsi

$$V = \frac{2}{3}\pi\,\overline{AM}^2.BD = 2\pi\,AM.BD \times \frac{1}{3}AM.$$

Mais $2\pi\,AM.BD$ est la mesure de l'aire A de la surface cylindrique engendrée par BD (**640**) : donc encore

$$V = A.\frac{1}{3}AM.$$

* **688.** Corollaire i. Si l'on joint le sommet du triangle ABD avec le milieu I de sa base, l'aire A engendrée par cette base aura pour expression $A = 2\pi.II'.BD$, de sorte que l'on aura ainsi Fig. 280.

$$V = \frac{2}{3}\pi.II'.BD.AM.$$

Mais le centre de gravité G du triangle ABD se trouve sur AI et aux deux tiers de cette droite à partir de A (**293**): donc $GG' = \frac{2}{3}II'$; d'un autre côté, le produit BD.AM est le double de l'aire du triangle ABD; donc la valeur de V deviendra ainsi

$$V = ABD.2\pi GG',$$

c'est-à-dire que *le volume engendré par la révolution d'un triangle autour d'un axe, mené dans son plan par son sommet, a pour mesure son aire multipliée par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

689. Corollaire ii. *Le volume engendré par la révolution d'un secteur polygonal régulier autour d'un des rayons qui le terminent, a pour mesure l'aire de la surface engendrée par sa base multipliée par le tiers de son apothême* (**643**).

Théorème XVIII.

690. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de l'aire de la calotte qui lui sert de base multipliée par le tiers du rayon* [1], c'est-à-dire

---

[1] On peut, en effet, regarder cette calotte comme une surface polyédrale dont les faces seraient infiniment petites (509);

qu'en désignant par V et par R le volume et le rayon de ce secteur et par C l'aire de la calotte qui lui sert de base, on aura

$$V = \frac{1}{3} C.R.$$

Fig. 267. Considérons, en effet, le secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire AEBO autour du rayon AO : j'inscris et je circonscris à l'arc AB deux lignes brisées régulières du même nombre de côtés ADEFB et A'D'E'F'B'; je représente par s et S les volumes engendrés par les secteurs polygonaux correspondants, par a et par A les aires des surfaces de révolution décrites par ces deux lignes et par r l'apothême de la première. Nous aurons

$$S = \frac{1}{3} AR \text{ et } s = \frac{1}{3} ar, \text{ d'où } \frac{S}{s} = \frac{A}{a} \cdot \frac{R}{r} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{A'C'}{AC},$$

en remplaçant A et a par leurs valeurs respectives $2\pi R . A'C'$ et $2\pi r . AC$.

Si l'on inscrit et si l'on circonscrit à l'arc AB des lignes brisées toujours semblables et qui aient un plus grand nombre de côtés, toutes les quantités qui entrent dans ces équations varieront, à l'exception de R, mais ces équations subsisteront toujours. Or, on peut prendre le nombre des côtés des deux lignes brisées assez grand pour que R et r diffèrent de moins que toute grandeur donnée, et il en sera alors de même de A'C' et de AC, comme nous l'avons prouvé dans la démonstration de l'aire de la calotte (644). Donc la limite du second membre de notre 3e équation, et, par conséquent, aussi celle du premier est l'unité : donc *la différence entre* S *et* s *peut être rendue moindre que toute quantité assignable.* Mais le volume V du secteur sphérique est évidemment compris entre S et s; donc il est leur limite commune. Puis donc que

---

de sorte qu'en menant des plans par le centre de la sphère et par chacune des arêtes de cette surface, on décomposera le secteur sphérique en une infinité de pyramides qui auront pour hauteur commune le rayon de la sphère, etc.

$$S = \tfrac{1}{3} AR,$$

on aura

$$V = \tfrac{1}{3} CR.$$

691. Corollaire i. *Le volume de la sphère a pour mesure l'aire de la surface sphérique multipliée par le tiers du rayon.* Si donc on désigne ce rayon par R, on aura pour expression de ce volume :

$$sph.\,R = 4\pi R^2 . \tfrac{1}{3} R\ (^1) = \tfrac{4}{3}\pi R^3 :$$

ainsi on peut dire que *le volume de la sphère a pour mesure les quatre tiers du rapport de la circonférence au diamètre multipliés par le cube du rayon*, ou *le sixième de ce rapport multiplié par le cube du diamètre* D; car on a $R = \frac{D}{2}$, et partant $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$.

692. Corollaire ii. *Le volume d'un onglet sphérique est égal au quart de celui de la sphère multiplié par son angle.*

Théorème XIX.

693. *Le volume engendré par la révolution d'un segment de cercle* AMBA *autour d'un diamètre extérieur à ce segment, est le sixième d'un cylindre qui aurait pour rayon la corde* AB *de ce segment, et pour hauteur la projection* A′B′ *de cette corde sur l'axe de révolution* OC. Fig. 282.

Joignons, en effet, OA et OB, et il est clair que le corps engendré par le segment AMBA sera la différence de ceux engendrés par le secteur OAMB et par le triangle OAB. Or, le premier de ces corps étant la différence des deux secteurs sphériques OCB et OCA, son volume sera égal au tiers du rayon multiplié par la

---

(1) Ou, ce qui revient au même, à l'aire d'un grand cercle multipliée par les $\frac{4}{3}$ du rayon ou par les $\frac{2}{3}$ du diamètre ; mais le volume du cylindre circonscrit à la sphère est égal à l'aire d'un grand cercle multiplié par le diamètre : donc *le volume de la sphère est les $\frac{2}{3}$ de celui du cylindre circonscrit.* Ce théorème et ceux énoncés dans les notes (2) et (3) du numéro 647 sont dus à *Archimède.*

différence des calottes qui leur servent de base, c'est-à-dire par l'aire de la zone AMB : ainsi

$$vol.\,\text{OAMB} = zone\ \text{AMB}.\frac{\text{AO}}{3} = \tfrac{2}{3}\pi\overline{\text{AO}}^2.\text{A}'\text{B}'\ (\mathbf{645}).$$

D'un autre côté, le volume engendré par le triangle OAB a pour expression (**687**)

$$vol.\,\text{OAB} = surf.\,\text{AB}.\frac{\text{OI}}{3} = \tfrac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2.\text{A}'\text{B}'\ (\mathbf{642}):$$

donc

$$vol.\,\text{AMBA} = \tfrac{2}{3}\pi\text{A}'\text{B}'(\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OI}}^2).$$

Mais le triangle rectangle AOI donne

$$\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OI}}^2 = \overline{\text{AI}}^2 = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{4},$$

car $\text{AI} = \frac{\text{AB}}{2}$; donc on aura enfin, en remplaçant,

$$vol.\,\text{AMBA} = \tfrac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{A}'\text{B}',$$

ce qui démontre notre théorème (**673**).

Théorème XX.

694. *Le volume d'une tranche sphérique est égal à celui d'un cylindre de même hauteur que la tranche, et ayant pour base la demi-somme de ses bases, plus le volume d'une sphère qui aurait pour diamètre la hauteur de la tranche.*

Considérons la tranche engendrée par la révolution du segment A'AMBB' autour du diamètre CD. Son volume V se compose de ceux engendrés par le segment AMBA et par le trapèze AB' : ainsi, il a pour expression (**693** et **684**) :

$$\text{V} = \tfrac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{A}'\text{B}' + \tfrac{2}{6}\pi\text{A}'\text{B}'(\overline{\text{AA}'}^2 + \overline{\text{BB}'}^2 + \text{AA}'.\text{BB}');$$

ou, en mettant $\frac{1}{6}\pi\,\text{A}'\text{B}'$ en facteur commun,

$$\text{V} = \tfrac{1}{6}\pi\,\text{A}'\text{B}'(\overline{\text{AB}}^2 + 2\overline{\text{AA}'}^2 + 2\overline{\text{BB}'}^2 + 2\,\text{AA}'.\text{BB}').$$

Or, comme nous voulons exprimer le volume de la tranche en fonction seulement de ses bases et de sa

hauteur, il faut éliminer $\overline{AB}^2$ de l'expression précédente. Pour cela, j'abaisse sur BB′ la perpendiculaire AF, et le triangle rectangle ABF me donne $\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2$. Mais, BF étant la différence des droites BB′ et AA′, son carré vaut $\overline{BB'}^2 + \overline{AA'}^2 - 2AA'.BB'$ (**394**); donc $\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{AA'}^2 - 2AA'.BB'$, car AF=A′B′; donc en remplaçant dans l'expression de V, il viendra, après avoir réduit,

$$V = \tfrac{1}{6}\pi A'B'(\overline{A'B'}^2 + 3\overline{AA'}^2 + 3\overline{BB'}^2),$$

ou, en effectuant la multiplication de $\overline{A'B'}^2$ par $\frac{1}{6}\pi A'B'$, et celle de $3\overline{AA'}^2 + 3\overline{BB'}^2$ par $\frac{1}{6}\pi$,

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\overline{A'B'}^3 + A'B'\left(\frac{\pi\overline{AA'}^2 + \pi\overline{BB'}^2}{2}\right),$$

formule qui démontre notre théorème; car $\frac{1}{6}\pi\overline{A'B'}^3$ est le volume de la sphère dont AB′ est le diamètre, et $\frac{\pi\overline{AA'}^2 + \pi\overline{BB'}^2}{2}$ peut être regardé comme un cercle dont l'aire serait la demi-somme des bases de la tranche.

695. Corollaire. En observant qu'un segment sphérique peut être considéré comme une tranche dont la base supérieure est nulle, on voit qu'*un segment sphérique est égal à la moitié d'un cylindre de même base et de même hauteur que lui, plus la sphère dont cette hauteur est le diamètre.*

696. Si l'on représente par R et par h le rayon et la hauteur du segment sphérique engendré par ACA′, on aura, pour expression de son volume,

$$V = \tfrac{1}{2}\pi h.\overline{AA'}^2 + \tfrac{1}{6}\pi h^3.$$

Mais (**236**, 1°) $\overline{AA'}^2 = h(2R - h)$; en substituant, mettant $\frac{1}{6}\pi h^2$ en facteur commun et réduisant, il viendra

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3R - h),$$

de sorte que le *volume d'un segment sphérique a pour mesure le tiers du produit du rapport de la cir-*

conférence au diamètre, multiplié par le carré de sa hauteur et encore par l'excès du triple du rayon sur cette même hauteur (¹).

PROBLÈME II.

697. *Évaluer le volume d'un tronc de pyramide dont les bases ne sont point parallèles.*

La question revient évidemment à déterminer les hauteurs de la pyramide totale et de la pyramide retranchée. Pour déterminer celle de la première, je fais
Fig. 277. aux points G et H deux angles égaux à QGH et à MHG, puis, du sommet du triangle résultant, j'abaisse sur GH la perpendiculaire indéfinie T′RO. Alors, si l'on replie ce triangle sur TGH, le point T′ ira se placer sur T, de sorte que les deux droites TR et RO détermineront un plan perpendiculaire à la base de la pyramide; donc le pied de sa hauteur se trouvera sur T′RO; donc si l'on fait aussi aux points H et I des angles égaux à MHI et à NIH, et que du point T″ on abaisse une perpendiculaire T″S sur HI, le pied de la hauteur de la pyramide devra aussi se trouver sur le prolongement de cette droite; donc il sera le point O. On connaîtra donc, dans le triangle rectangle TRO, l'hypoténuse TR = T′R′ et le côté RO; donc il sera facile de déterminer TO. Une construction semblable fera connaître la hauteur de la petite pyramide.

PROBLÈME III.

**698*. *Trouver le volume engendré par un hexagone régulier* ABCDEF *tournant* 1° *autour d'un de ses côtés* AB; 2° *autour de sa première diagonale* AC.

Fig. 283. 1° Le volume demandé V se compose du double du volume engendré par le triangle BDC et du cylindre

---

(¹) On parviendrait directement à ce résultat en observant que le segment sphérique engendré par ACA′ est la différence des volumes du secteur sphérique et du cône engendrés par OAC et par OAA′.

décrit par le rectangle AD. Or, $BD = a\sqrt{3}$ (338), en désignant par a le côté de l'hexagone ;

$$CI = \frac{a}{2} \text{ et } BI = \frac{a}{2}\sqrt{3};$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} 2\,vol.\,BDC = \frac{3\pi a^3}{2}\,(688) \\ vol.\,AD \;= 3\pi a^3 \end{array}\right\} \text{ donc } V = \tfrac{9}{2}\pi a^3.$$

2° $\quad EI = \frac{3a}{2},\ CI = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ BI = \frac{a}{2};$ Fig. 284.

donc

$$\left.\begin{array}{l} vol.\,CDEI = \frac{19\pi a^3\sqrt{3}}{24}\,(684) \\ vol.\,BCI \;= \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}\,(681) \end{array}\right\} \text{ donc } V = \frac{5\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$

PROBLÈME IV.

* **699**. *Évaluer le volume engendré par une figure plane symétrique par rapport à un axe, en tournant autour d'une droite parallèle à cet axe et tracée dans son plan.* Fig. 285.

Soit XY l'axe de symétrie de la courbe proposée; j'inscris dans cette courbe un polygone quelconque ABCDEFGH qui soit symétrique par rapport à XY, et je cherche les volumes engendrés par les triangles ABH et DEF, et par les trapèzes HC et GD.

Le volume engendré par le triangle BAH est la différence des deux troncs de cône IABK et IAHK ; ainsi il a pour mesure

$$\tfrac{1}{3}\pi IK.(\overline{BK}^2 + \overline{AI}^2 + BK.AI - \overline{AI}^2 - \overline{HK}^2 - AI.HK);$$

Or, $\overline{BK}^2 - \overline{HK}^2 = (BK + HK)(BK - HK) = 2AI.BH$,

car on sait que la différence des carrés de deux quantités est égale au produit de la somme de ces quantités multipliés par leur différence (note (1) du n° 394); d'un autre côté $BK.AI - AI.HK = AI\,(BK - HK) = AI.BH$; donc on trouvera en réduisant

$$\pi\, AI.IK.BH,$$

mais $IK.BH$ est le double de l'aire du triangle ABH;
donc $$V = ABH.2\pi AI.$$
Ainsi le théorème du n° 688 est encore vrai pour un triangle isocèle qui tourne autour d'une droite tracée dans son plan parallèlement à son axe de symétrie.

Si on prolonge les côtés BC et GH jusqu'à leur rencontre en O sur XY, on verra que le trapèze BCGH étant la différence des deux triangles COG et BOH, le volume qu'il engendrera aura pour mesure la différence des volumes engendrés par leurs aires, c'est-à-dire la sienne multipliée par $2\pi AI$.

Donc le volume engendré par le polygone symétrique ABCDEFGH a pour mesure le produit de son aire multipliée par $2\pi AI$.

Ce résultat est vrai, quelle que soit la grandeur des côtés et des angles du polygone symétrique que nous avons inscrit dans la courbe proposée ; donc il le sera encore quand ces côtés seront infiniment petits, c'est-à-dire quand ce polygone aura atteint sa limite, qui est la figure proposée. Donc *le volume engendré par une surface plane symétrique par rapport à un axe, en tournant autour d'une parallèle à cet axe et tracée dans son plan, a pour mesure l'aire de cette surface multipliée par la circonférence que décrit un point quelconque de l'axe de symétrie* [1].

Problème V.

700. *Trouver le volume engendré par un octogone régulier tournant autour d'un de ses côtés.*

Fig. 286. Il est facile de voir que le triangle KBC est isocèle et qu'ainsi $BK = KC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, donc $BE = a(1+\sqrt{2})$, et comme cette droite est évidemment le double de l'apothême, l'aire de l'octogone est égale à
$$2a^2(1+\sqrt{2}). \text{ Donc } V = 2\pi a^3(1+\sqrt{2})^2.$$

[1] Ce problème est extrait de la Géométrie de M. *Catalan*.

Problème VI.

* **701**. *Évaluer le volume d'un corps de figure quelconque.*

Le moyen le plus naturel qui se présente pour évaluer le volume d'un corps, c'est de le décomposer en parties dont on puisse calculer immédiatement les volumes. Supposons donc que l'on fasse glisser une ligne droite sur la surface du corps, de manière qu'elle reste perpendiculaire à un plan donné : elle engendrera la surface d'un cylindre dont la base ABCDEF, située sur le plan dont il s'agit, sera la projection du corps sur ce plan. Je divise cette base par deux séries de lignes droites perpendiculaires entre elles et équidistantes les unes des autres, et par chacune je mène un plan perpendiculaire à celui de la base. De cette manière notre corps sera partagé en éléments tels que M′P, que l'on pourra regarder comme la différence de deux troncs mP et mP′ de parallèlipipèdes rectangles, si les lignes de division de la base sont suffisamment rapprochées. Or, le volume de chacun de ces troncs est égal à l'aire A de sa base multipliée par le quart de la somme de ses quatre arêtes : d'où l'on conclut facilement, en mettant A en facteur commun, que le volume demandé a pour mesure le produit de l'aire A multipliée par le quart de la somme des arêtes de tous les éléments dans lesquels on l'aura décomposé ; et, comme il y aura des arêtes qui appartiendront à 1, 2, 3 ou 4 éléments, il s'ensuit que, *pour avoir le volume d'un corps, il faut partager sa projection sur un plan quelconque en rectangles, par deux séries de lignes droites d'autant plus rapprochées que l'on voudra plus d'exactitude, puis, ayant élevé des perpendiculaires aux sommets de chacun de ces rectangles, mesurer les parties de ces perpendiculaires interceptées par la surface du corps proposé, enfin multiplier l'aire de l'un des rectangles dans lesquels on aura décomposé la projection du corps, par la somme faite des parties de ces*

Fig. 287.

perpendiculaires qui répondent à un sommet commun à quatre rectangles, des trois quarts, de la moitié et du quart de celles qui répondent à un sommet commun à trois, deux ou un de ces rectangles.

Dans la marine on a besoin de mesurer le volume de la partie de la carène d'un vaisseau qui est plongée dans l'eau. Alors on prend le plan vertical mené par la quille pour plan de projection, et l'on retombe ainsi sur la règle précédente.

* **702.** Scholie. Remarquons toutefois que les éléments dans lesquels nous avons décomposé notre corps n'ont pas tous pour bases des rectangles, mais seulement des portions de rectangles. On néglige alors ceux qui, *à vue*, paraissent répondre à des bases moindres que la moitié d'un rectangle, et l'on considère les autres comme des éléments entiers.

Problème VII.

* **703.** *Évaluer le volume de la tranche qu'on obtient en coupant un corps par deux plans parallèles.*

Partageons l'épaisseur de la tranche en un assez grand nombre de parties égales, menons par tous les points de division des plans parallèles à ses bases, et projetons ensuite toutes les tranches élémentaires dans lesquelles nous l'aurons ainsi décomposée sur un plan
Fig. 288. perpendiculaire à tous les plans sécants. Soit AB′ la projection de l'une de ces tranches partielles. Je divise AB en un grand nombre de parties égales, et par les points de division je mène des plans CC′, DD′... perpendiculaires à la droite AB : je partage ainsi la tranche en éléments dont chacun aura pour mesure l'aire de l'un des rectangles élémentaires multipliée par le quart de la somme de ses quatre arêtes. Ainsi en désignant ces arêtes respectivement par a et a', b et b', c et c'... on aura pour expression du volume v de la tranche AB′ :

$$v = \mathrm{AC}.\mathrm{CC}'.\frac{a+a'+2c+2c'+2d+2d'+\ldots+b+b'}{4},$$

ou $$v = \mathrm{CC}'.\frac{\mathrm{AC}}{2}\left(\frac{a+a'+b+b'}{2}+c+c'+d+d'+\ldots\right).$$

Mais, en désignant par A et par A′ les aires des bases de la tranche, on a (**389**):

$$\mathrm{A} = \mathrm{AC}\left(\frac{a+b}{2}+c+d+\ldots\right),$$

et $$\mathrm{A}' = \mathrm{AC}\left(\frac{a'+b'}{2}+c'+d'+\ldots\right),$$

donc $$v = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}'}{2}.\mathrm{CC}'.$$

Ainsi le volume de l'une quelconque des tranches élémentaires est égal à la demi-somme des aires de ses bases multipliée par son épaisseur : d'où l'on conclura facilement, en raisonnant comme au n° **389**, que, *pour évaluer le volume d'une tranche quelconque d'un corps, il faut diviser son épaisseur en un assez grand nombre de parties égales, mener par les différents points de division des plans parallèles aux bases, puis ajouter à la demi-somme des aires de ces bases les aires de toutes les sections intermédiaires, et multiplier le résultat par la distance de deux plans sécants consécutifs.*

Cette règle convient surtout pour évaluer le volume d'un corps terminé par une surface de révolution : car, en supposant les deux plans limites tangents à la surface aux points mêmes où son axe la perce, les sections sont des cercles, de sorte qu'il est alors facile d'évaluer leurs aires.

Problème VIII.

* **704**. *Évaluer l'aire d'une surface courbe quelconque.*

Soit ABCDE la projection de cette surface sur un plan quelconque. Si nous opérons comme au n° **701**, nous décomposerons l'aire demandée en quadrilatères Fig. 287.

curvilignes, que l'on pourra d'autant mieux regarder comme des quadrilatères plans, que les plans sécants seront plus rapprochés les uns des autres. Soit A l'aire de l'un MNPQ de ces petits quadrilatères, et a celle de sa projection $mnpq$. Si nous convenons de désigner par m, n, p, q, les perpendiculaires mm', nn', pp', qq', abaissées des sommets de cette projection sur le plan du quadrilatère PM, et par M, N, P, Q, celles abaissées des sommets de celui-ci sur le plan de projection, nous aurons pour la mesure du volume du tronc de parallélipipède mP la double expression :

$$a.\frac{M+N+P+Q}{4} \text{ et } A.\frac{m+n+p+q}{4},$$

partant
$$A=a.\frac{M+N+P+Q}{m+n+p+q}.$$

Mais les triangles rectangles Mmm', Nnn'..... sont équiangles : car les angles Mmm', Nnn'..... mesurent l'inclinaison du plan du quadrilatère PM sur le plan de projection : donc

$$M:m::N:n::P:p::Q:q;$$

d'où
$$\frac{M+N+P+Q}{m+n+p+q}=\frac{M}{m}, \text{ et ainsi } A=a.\frac{M}{m}.$$

Donc, en désignant par A′, M′ et m'; A″, M″ et m''....., les quantités analogues à A, M et m, pour les autres quadrilatères dans lesquels nous avons décomposé la surface à mesurer, nous aurons, pour expression de son aire X :

$$X=a\left(\frac{M}{m}+\frac{M'}{m'}+\frac{M''}{m''}+\ldots\ldots\right);$$

de sorte qu'il ne s'agit plus que de déterminer les perpendiculaires M, M′, M″...... et m, m', m''......
Les premières se mesureront immédiatement; quant aux secondes, voici comment on pourra les obtenir : rabattez les faces mN et mQ du tronc mP sur le plan

de projection, et prolongez les côtés MN et MQ jusqu'à Fig. 289.
leur intersection, en R et en S, avec les côtés de l'angle *nmq*. Il est clair qu'en joignant RS, vous aurez la trace du plan du quadrilatère MNPQ sur le plan de projection : par conséquent, si l'on mène *m*T perpendiculaire sur RS, la perpendiculaire abaissée de *m* sur l'hypoténuse du triangle rectangle formé en joignant le point T avec le point M de l'espace, sera la droite demandée *m*. Or, le rabattement de ce triangle sur le plan de projection est T*m*M′ : donc celui de la perpendiculaire cherchée *m* est la ligne *m*O′, qu'il est facile de mesurer [1].

Problème IX.

705. On lit dans la physique de M. Biot que, *si l'on dore un cylindre d'argent pesant* 360° *avec* 6 *onces d'or, on pourra l'étirer en un fil de* 1351900 *pieds de long sur* $\frac{1}{8}$ *de ligne de largeur : quelle est*

---

[1] Si l'on veut calculer *m*, on observera que le triangle rectangle M′*m*T donne $\frac{M}{m}=\frac{M'T}{mT}$: d'où $\frac{M^2}{m^2}=1+\frac{M^2}{\overline{mT}^2}$. Mais le triangle *m*SR donne de même $mT.SR=mS.mR$: d'où $\frac{1}{\overline{mT}^2}=\frac{\overline{SR}^2}{\overline{mS}^2\cdot\overline{mR}^2}=\frac{1}{\overline{mR}^2}+\frac{1}{\overline{mS}^2}$: donc $\frac{M^2}{m^2}=1+\frac{M^2}{\overline{mR}^2}+\frac{M^2}{\overline{mS}^2}$. Or, en désignant par *b* et par *c* les deux côtés du rectangle *mp*, et par *d* et *e* les différences M — N et M — Q, on tire des triangles semblables MNI et MR*m*, MQK et M*m*S : $\frac{M}{mR}=\frac{d}{b}$, et $\frac{M}{mS}=\frac{e}{c}$;

donc $$\frac{M}{m}=\sqrt{1+\frac{d^2}{b^2}+\frac{e^2}{c^2}}\,;$$

par conséquent $$A=bc\sqrt{1+\frac{d^2}{b^2}+\frac{e^2}{c^2}}\,.$$

C'est la formule même donnée par *la méthode des quadratures*.

l'épaisseur de la couche d'or, en admettant, avec Réaumur, qu'un pied cube d'or pèse 21220 *onces, et qu'un pied cube d'argent en pèse* 11523?

Fig. 290. Soient AE le parallélipipède rectangle qui représente le fil, L sa longueur AB, l sa largeur AD, et e son épaisseur AC. Lle est donc l'expression de son volume. Or, d'après les poids donnés d'un pied cube d'or et d'un pied cube d'argent, on verra facilement que 6° d'or et 360° d'argent sont les poids respectifs de 844$^{\text{l.c}}$,293 d'or, et de 93287$^{\text{l.c}}$,702 d'argent; de sorte que $\mathrm{L}le = 94131{,}995$, équation qui détermine e, puisque L et l sont connus (la ligne est actuellement l'unité linéaire) On trouvera $e = \frac{11}{258{,}5}$.

L'épaisseur x de la couche d'or étant partout la même, il suffira, pour en avoir le volume, de multiplier son aire par x. Or, celle de la face supérieure est évidemment Ll; celle de la face latérale est $\mathrm{L}(e-2x)$, car sa hauteur est bf, et, comme le volume de la couche est 844$^{\text{l.c}}$,293, nous aurons l'équation $2\{\mathrm{L}l+\mathrm{L}(e-2x)\}x = 844{,}293$; mais comme x est une très-petite quantité, puisqu'elle est nécessairement beaucoup moindre que e, nous pourrons négliger son carré, ce qui réduira cette équation à $2\mathrm{L}(l+e)x = 844{,}293$; d'où l'on tire, en opérant toujours par logarithmes, $x = \frac{1}{59428}$ de ligne.

706. Lorsque le corps dont on demande le volume est d'une forme très-irrégulière, les procédés que nous avons indiqués deviendraient impraticables par leur longueur. On peut alors le placer dans un vase dont on aura préalablement déterminé la capacité; puis, mesurant la quantité d'eau ou de sable fin nécessaire pour achever de remplir le vase, on voit qu'une simple soustraction suffira pour résoudre le problème.

Si le corps à mesurer est d'un petit volume, on le plongera dans un vase rempli d'eau; et, en mesurant en grammes le poids de l'eau qu'il aura chassée du vase,

on connaîtra le volume de cette eau, et par conséquent celui du corps en centimètres cubes (Arith., n° 158). Observons toutefois que, si l'on avait besoin d'une très-grande exactitude, il faudrait avoir égard à la température de cette eau, comme on l'enseigne dans les traités de physique.

707. On peut encore parvenir à la détermination des volumes des corps au moyen de leurs *poids spécifiques. Le* POIDS SPÉCIFIQUE *d'un corps est le rapport du poids d'un volume quelconque de la substance de ce corps à celui d'un pareil volume d'eau :* d'où l'on voit que, *si l'on multiplie le volume d'un corps évalué en décimètres cubes par son poids spécifique, on aura le poids de ce corps en kilogrammes, et que, par conséquent, en divisant le poids d'un corps par son poids spécifique, on aura son volume en décimètres cubes*. Ces deux règles sont d'une application continuelle dans les arts.

Premier exemple. Calculer le diamètre intérieur d'un tube de verre.

On pèsera ce tube, en prenant le *gramme* pour unité; puis, après y avoir introduit une certaine quantité de mercure, on le pèsera de nouveau. La différence de ces deux poids sera évidemment celui d'une colonne de mercure de même diamètre que le tube : donc, en divisant ce poids par 13,599, poids spécifique du mercure, *on aura le volume de la colonne* en centimètres cubes. Si donc on a mesuré sa longueur, le quotient trouvé en divisant ce volume par cette longueur sera l'aire de la section du tube exprimée en centimètres carrés (**673**). Il ne s'agira donc plus, pour résoudre le problème, que de diviser cette aire par π, et d'extraire la racine carrée du quotient (**381**).

Deuxième exemple. La colonne de SÉVÈRE, *près d'Alexandrie, est formée d'un fût en granit de* 30^{m} *de haut sur* 3 *de diamètre, qui repose sur un piédestal*

cubique de marbre de 5^m *de côté. Quel est son poids à moins d'un kilogramme?*

L'aire de la base est $\frac{\pi}{4}.9$: donc le volume total du fût est $\left(\frac{\pi}{4}.9.30\right)^{m.c}$, et celui du piédestal $125^{m.c}$; or les poids spécifiques du granit et du marbre étant respectivement 2,716 et 2,960, on voit qu'un mètre cube du premier pèsera $2716^{K.G}$, et qu'un mètre cube du second en pèsera 2960 : donc le poids total de la masse sera

$$\left(\frac{\pi}{4}.9.30.2716+125.2960\right)^{K.G}.$$

Or $\frac{9.30.2716}{4}=183330$: donc, pour ne pas commettre une erreur d'un kilogramme, il faut que la valeur de π ne soit pas fautive d'un millionième (Arith., 308). On prendra donc $\pi=3,141593$, et on trouvera pour résultat 945948 kilogrammes.

Troisième exemple. Calculer la valeur en francs d'un tétraèdre régulier d'or, qui a 5 *centimètres de côté, sachant que la proportion de l'or à l'argent est* 15,5 (Arith., 158) *et en supposant que le poids spécifique de l'or soit* 19.

En s'appuyant sur les valeurs données au n° **339**, on trouvera facilement que le volume d'un tétraèdre régulier dont l'arête est a a pour mesure $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; donc en vertu de la règle du n° **707**, le poids de notre tétraèdre sera $\frac{125.19.\sqrt{2}}{12}$ grammes, de sorte que s'il était en argent il vaudrait $\frac{125.19.\sqrt{2}}{12.5}$ francs; puis donc qu'il est en or, il vaut

$$\frac{125.19.\sqrt{2}.15,5}{12.5}=\frac{125.19.3,1.\sqrt{2}}{19}=3005 \text{ francs}.$$

Quatrième exemple. Quel est, à moins d'un millimètre près, le diamètre d'un boulet en fer de 12 *ki-*

logrammes, en supposant que le poids spécifique du fer soit 7 ?

Soit x le diamètre de ce boulet exprimé en décimètres, nous aurons pour expression de son volume $\frac{1}{6}\pi x^3$, et, partant pour celle de son poids, $\frac{7}{6}\pi x^3$ kilogrammes ; donc

$$\frac{7}{6}\pi x^3 = 12,\ \text{d'où}\ x = \sqrt[3]{\frac{72}{7\pi}}.$$

x étant un nombre de décimètres et sa valeur devant être exacte à moins d'un millimètre près, il s'agira par conséquent d'extraire la racine cubique de $\frac{72}{7\pi}$ à moins d'un centième. Je multiplierai donc ce nombre par 100^3, et il s'agira de savoir avec quel degré d'approximation il faudra évaluer π pour avoir la valeur de $\frac{72000000}{7\pi}$, à moins d'une unité près. En appliquant la règle donnée au n° 312 de l'Arithmétique, on verra que la valeur de π ne devra pas être fautive d'un billionième. On fera donc $\pi = 3{,}141592654$, et en effectuant ensuite les calculs, on trouvera que $x = 148$ millimètres.

Cinquième exemple. Quel est le diamètre d'un fil de platine pesant un gramme et dont la longueur est d'un kilomètre, en supposant que le poids spécifique du platine soit 22 ?

Le gramme étant l'unité de poids, on prendra le centimètre pour unité linéaire, et on trouvera pour équation du problème

$$22.100000\pi.x^2 = 1,\ \text{d'où}\ x = \sqrt{\frac{1}{220000\pi}}.$$

CHAPITRE II.

DE LA COMPARAISON DES VOLUMES.

Théorème I.

708. *Les volumes de deux pyramides semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arêtes homologues.*

Fig. 248. Puisque les deux pyramides *sabcde* et SABCDE sont semblables, leurs angles polyèdres *s* et S sont égaux : ainsi on pourra placer la première dans la seconde, de manière que les arêtes homologues de ces deux angles coïncident. De cette manière, la base *abcde* se trouvera en A′B′C′D′E′ parallèlement à la base ABCDE : donc la hauteur SO sera coupée au point O′, en parties proportionnelles à SA et à SA′, et par conséquent à AB et à A′B′ ; de sorte qu'on aura :

$$\mathrm{SO} : \mathrm{SO'} \text{ ou } so :: \mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} \text{ ou } ab.$$

Mais la similitude des bases des deux pyramides donne aussi

$$\mathrm{ABCDE} : abcde :: \overline{\mathrm{AB}}^2 : \overline{ab}^3;$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, puis divisant les deux termes du premier rapport par 3, il viendra enfin :

$$\mathrm{ABCDE}.\tfrac{1}{3}\mathrm{SO} : abcde.\tfrac{1}{3}so :: \overline{\mathrm{AB}}^3 : \overline{ab}^3,$$

ce qui démontre notre théorème (**678**).

Théorème II.

709. *Les volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de leurs arêtes homologues.*

En effet, nous pourrons partager les deux polyèdres en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun, et semblablement disposés; puis former autant de proportions, en exprimant que *chacun des tétraèdres du premier polyèdre* EST *à celui qui lui correspond dans le second*, COMME *le cube d'une de ses arêtes* EST *au cube de l'arête homologue de l'autre tétraèdre*. Mais, les polyèdres étant semblables, leurs arêtes et leurs diagonales homologues, et partant les cubes de ces arêtes et de ces diagonales, sont proportionnels : donc les seconds rapports de toutes nos proportions sont égaux, car ce sont des rapports de cubes d'arêtes ou de diagonales homologues des deux polyèdres. Les premiers rapports sont donc aussi égaux, et forment ainsi une suite dont les antécédents sont les tétraèdres du premier polyèdre, et dont les conséquents sont les tétraèdres correspondants du second : donc la somme de tous ces antécédents, etc. (398).

Théorème III.

710. *Les volumes des cônes, des troncs de cône, des cylindres, des secteurs sphériques, des onglets, des tranches et des segments semblables, sont proportionnels aux cubes de leurs lignes homologues.*

Il sera facile de démontrer ces propositions en imitant les démonstrations du chapitre II du livre IX. Si, par exemple, on considère deux troncs de cône semblables, on désignera par V, R, r et h, le volume, les rayons des bases et la hauteur de l'un, et par les mêmes lettres accentuées les quantités correspondantes du second. On aura alors (**684**) :

$$V : V' :: (R^2 + r^2 + Rr)h : (R'^2 + r'^2 + R'r')h';$$

Mais $R : R' :: r : r'$: multipliant cette proportion

par $r : r' :: r : r'$, il viendra

$$Rr : R'r' :: r^2 : r'^2 :: R^2 : R'^2 :: h^2 : h'^2;$$

d'où l'on tire

$$Rr + r^2 + R^2 : R'r' + r'^2 + R'^2 :: h^2 : h'^2.$$

Multipliant enfin la première de nos proportions par celle-ci, on trouvera, après avoir simplifié :

$$V : V' :: h^3 : h'^3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème IV.

711. *Les volumes des deux sphères sont proportionnels aux cubes de leurs rayons.*

Cela résulte évidemment de ce que l'expression du volume d'une sphère est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE.

NOTES SUR LA GÉOMÉTRIE.

DE LA SIMILITUDE.

§. I. *Des figures semblables.*

1. *Deux lignes sont* SEMBLABLES *lorsqu'on peut les placer de telle sorte qu'en menant par un même point des droites à tous leurs points, les* RAYONS VECTEURS (c'est ainsi que l'on appelle ces droites) *dont les directions coïncident, sont proportionnels.*

Les figures terminées par ces lignes sont aussi dites semblables.

Ainsi, supposons que l'on ait transporté la ligne *a b c k* en A′B′C′K′, et qu'en tirant par un certain point O les droites quelconques OA, OB, OC.... qui rencontrent la courbe A′B′C′K′ aux points respectifs A′, B′, C′, K′..... on ait la suite de rapports égaux Fig. 291.

$$OA : OA' :: OB : OB' :: OC : OC' :: \text{etc.}$$

la ligne et la figure *a b c k* seront semblables à la ligne et à la figure ABCK.

L'origine commune O de tous les rayons vecteurs se nomme le *centre de similitude* des deux lignes ou des deux figures ABCK et A′B′C′K′, et les rayons vecteurs dont les directions coïncident sont dits *homologues*. Tels sont OA et OA′.

2. Si, en ramenant la ligne A′B′C′K′ à sa position primitive *a b c k*, le point O va se placer en *o*, on dit que ces points O et *o* sont *les centres de similitude* de ABCK et de *a b c k*.

Si les rayons homologues sont parallèles et dirigés dans le même sens, les deux lignes sont alors semblables et *semblablement placées*. Sinon, elles sont simplement semblables.

Il est évident que les rayons vecteurs de l'une des deux lignes font entre eux les mêmes angles que les rayons vecteurs homologues de l'autre, c'est-à-dire que ceux auxquels ils sont proportionnels.

3. Il suit de là que pour construire une ligne semblable à une autre ABCK, on mènera d'un point quelconque O des rayons vecteurs à des points A, B, C..... de celle-ci, d'autant plus rapprochés que l'on voudra plus d'exactitude; puis on tirera par un point quelconque *o* des droites *oa, ob, oc*.......

telles que les angles formés par la première avec toutes les autres soient respectivement égaux à ceux que O A fait avec OB, OC.... Prenant ensuite sur ces droites des distances *oa, ob, oc* ... proportionnelles à O A, O B, O C...., et unissant les points *a, b, c*.... par un trait continu, le problème sera résolu.

Théorème I.

4. *Lorsque deux lignes* A B C K *et a b c k sont semblables, on peut prendre pour centre de similitude de l'une tel point que l'on veut de son plan, et il y aura toujours pour l'autre un centre correspondant de similitude.*

Puisque les deux lignes sont semblables, on peut placer *a b c k*, en A′B′C′K′ de telle manière qu'en tirant d'un certain point O des droites quelconques O A, OB, OC.... qui coupent la ligne A′B′C′K′ aux points respectifs A′, B′, C′.... on ait :

$$OA : OA' :: OB : OB' :: \text{etc.}$$

et O est alors leur centre commun de similitude. Cela posé, prenons sur le plan des deux lignes un point arbitraire F, et joignons F O, FA, F B.... puis faisons glisser la seconde ligne de manière que tous ses points décrivant des droites parallèles à O F, le point A′ soit venu se placer sur F A, je dis que les points B′, C′,.... se seront placés aux points B″, C″,.... où les parallèles menées à O F par les points B′, C′.... coupent les droites respectives F B, F C.... Tirons en effet A′ I parallèlement à F A, et joignons I B′ on aura (217) :

$$OF : OI :: OA : OA' :: OB : OB';$$

donc IB′ est parallèle à FB (219), et par conséquent B′ B″=IF=A′ A″; par une raison semblable C′C″=A′ A″ et ainsi de suite : donc la ligne A″B″C″K″ n'est autre chose que A′B′C′K′ transportée parallèlement à elle-même (213). Or, il est évident que les rapports $\frac{FA}{FA''}, \frac{FB}{FB''}, \frac{FC}{FC''}$.... sont respectivement égaux aux rapports $\frac{OA}{OA'}, \frac{OB}{OB'}, \frac{OC}{OC'}$.... et sont par conséquent égaux entre eux; donc le point F est aussi un centre de similitude des deux lignes A B C K et A″B″C″K″ (1), et le rapport de similitude n'a pas varié.

5. Scholie. Remarquons que le point F aurait pu être pris sur l'une des deux lignes, A B C K, par exemple. Dans ce cas, le point I eût été un point du périmètre de la seconde : car il divise O F dans le rapport de OA à OA′, de sorte qu'en transportant la ligne A′B′C′K′ en A″B″C″K″, le point I aurait été se

placer en F : donc I eût été le centre de similitude de A′B′C′K′ correspondant au centre F de A B C K.

6. Avant d'aller plus loin, nous observerons que *dans deux* Fig. 131.
circonférences différentes les arcs AMB *et* A′ M′ B′, *les secteurs* O A M B *et* O′A′M′B′ *et les segments* AMBA *et* A′M′B′A′ *qui correspondent à des angles au centre égaux, sont semblables :* car, en faisant coïncider ces deux angles, on reconnaît immédiatement que les rayons du plus grand des deux arcs, et les droites menées de son centre à sa corde, sont coupés en parties proportionnelles respectivement par le plus petit arc et par sa corde.

On peut conclure de là que *deux circonférences sont semblables,* mais il est facile aussi de le démontrer *à priori.*

Il suit en effet du n° 226 que *les droites qui,* comme AA′ ou AA″, *joignent les extrémités de deux rayons parallèles, et dirigés dans le même sens ou en sens contraires, vont concourir en un même point* C ou C′ *sur la droite* OO′ *qui joint les centres.* Or je dis que ces points C et C′ sont chacun un centre de similitude commun aux deux circonférences : car, si, par le point C, on mène un rayon vecteur quelconque CB′B, et que l'on joigne OB et O′B′, ces deux lignes seront parallèles, sans quoi, en menant par le centre O le rayon OI parallèle à O′B′, et joignant IB′ cette droite devrait aller passer par le point C, ce qui est absurde. Les triangles O C B et O′ C B′ sont donc équiangles : donc le rapport de CB à CB′ est le même que celui de OB à O′B′, et est par conséquent constant.

Donc deux circonférences sont deux courbes semblables qui ont deux centres communs de similitude. L'un C se nomme le *centre de similitude* DIRECT et l'autre C′ le *centre de similitude* INVERSE, parce que les rayons vecteurs homologues qui en partent sont dirigés en sens contraires.

Théorème II.

7. *Si deux figures sont semblables, et que l'une soit rectiligne, l'autre le sera aussi; elles auront chacune le même nombre d'angles et de côtés; leurs angles seront égaux chacun à chacun, et leurs côtés homologues* (ceux qui sont adjacents à des angles égaux) *seront proportionnels.*

Puisque les deux figures sont semblables, on pourra les placer de manière qu'elles aient un même centre de similitude O. Fig. 292.
Joignons maintenant ce point aux sommets A, B, C. . . de la figure rectiligne, et soient A′, B′, C′. . . . les points où les droites de jonction rencontrent le périmètre de la seconde figure. Si l'on tire A′B′, on verra que cette droite, étant parallèle à AB (219), coupe en parties proportionnelles à OA et à OA′

toutes les droites menées de O à AB (225); mais la portion du périmètre de la seconde figure qui est comprise entre OA′ et OB′ jouit de la même propriété : donc elle coïncide avec A′B′; donc à chaque côté du polygone ABCDE, correspond un côté de la seconde figure, qui est ainsi un polygone, *et les sommets homologues de ces deux polygones sont situés sur des droites issues du point* O. En second lieu, les angles des deux figures seront égaux chacun à chacun comme ayant les côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Enfin leurs côtés homologues seront proportionnels : car, comme deux triangles équiangles jouissent de cette propriété, le rapport de AB à A′B′ est le même que celui de OA à OA′, et est par conséquent constant.

8. Scholie. Remarquons que l'on aurait pu prendre pour centre de similitude l'un quelconque des sommets du polygone ABCDE, et qu'alors le centre de similitude du second eût été le sommet homologue de ce second polygone.

Si le centre de similitude du premier polygone eût été placé en I sur un côté quelconque AB, le centre de similitude du second aurait divisé le côté homologue *ab* dans le rapport de AI à BI.

Enfin, si le centre de similitude du polygone ABCDE est un point quelconque O de son plan, on obtiendra celui du second en construisant sur un quelconque de ces côtés *ab* un triangle équiangle au triangle OAB, qui a pour base le côté homologue de ABCDE.

9. Il suit de là que, *dans deux polygones semblables, les côtés et les diagonales homologues sont proportionnels.*

Théorème III.

10. Réciproquement, *deux polygones sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et leurs côtés homologues proportionnels.*

Fig. 292. Soient ABCDE et A′B′C′D′E′ les deux polygones, et supposons que les sommets homologues soient désignés par les mêmes lettres. *Plaçons ces deux polygones de manière que deux angles homologues* A *et* A′ *aient leurs côtés homologues parallèles et dirigés dans le même sens,* ce qui est toujours possible, puisque ces angles sont supposés égaux. Il suit immédiatement de cette disposition et de ce que les deux polygones sont équiangles entre eux, que tous leurs autres côtés homologues seront aussi parallèles et dirigés dans le même sens : ainsi l'égalité des angles B et B′ exige que les côtés CB et C′B′ soient parallèles et dirigés dans le même sens. Mais les deux polygones ont, en outre, leurs côtés homologues proportionnels; donc, en vertu de la proposition du n° 226, les droites AA′, BB′, et CC′ iront se croiser en un même point O;

de même CC′ ira concourir avec AA′ et BB′, c'est-à-dire aussi en O et ainsi de suite, de sorte que les droites qui joindront les sommets homologues des deux polygones concourront en ce point O. Or, ces polygones ont de plus leurs côtés parallèles, donc tous les rayons vecteurs homologues issus de O sont proportionnels, et par conséquent ces polygones sont semblables.

11. Scholie. Remarquons qu'*il suffit pour que les polygones soient semblables qu'ils aient tous leurs côtés moins un proportionnels et les angles compris égaux chacun à chacun*, ou bien *que tous leurs angles moins un soient égaux chacun à chacun et que les côtés adjacents à ces angles soient proportionnels*. Si l'on suppose, en effet, que cette dernière condition soit remplie, de sorte que

$$E=E',\ A=A',\ B=B',\ C=C',$$

et que

$$AE : A'E' :: AB : A'B' :: BC : B'C',$$

on verra immédiatement, en répétant le raisonnement du n° 10, que les droites EE′, AA′, BB′ et CC′ iront concourir en un même point O; or, je dis que le point D′ est sur la droite OD, car les droites E′D′ et C′D′, étant respectivement parallèles à ED et à CD, doivent diviser OD, l'une dans le rapport de OE′ à E′E et l'autre dans le rapport de OC′ à C′C, c'est-à-dire dans le même rapport. Donc les droites E′D′ et C′D′ doivent concourir sur OD.

12. Corollaire. 1° *Tous les carrés sont semblables;* 2° *deux losanges qui ont un angle égal;* 3° *deux rectangles dont deux côtés adjacents sont proportionnels;* 4° *deux parallélogrammes qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables.*

Théorème IV.

13. *Deux polygones semblables quelconques peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés.*

Nous pouvons d'abord décomposer l'un des polygones ABCDE, par exemple, en triangles. Cela posé, en reprenant la démonstration du n° 7, on reconnaîtra que les deux polygones peuvent être placés de manière que leurs sommets homologues se trouvent sur des droites qui concourent à leur centre commun O de similitude, et divisent ces droites en parties proportionnelles. Par conséquent, tous leurs côtés et toutes leurs diagonales homologues sont parallèles : ainsi les triangles ABE et A′B′E′, BED et B′E′D′, etc., sont semblables chacun à chacun (1) et semblablement disposés ([1]).

([1]) Voyez le renvoi de la page 116.

Si les triangles dans lesquels est décomposé le polygone ABCDE avaient des sommets autres que ceux de ce polygone, tels que S, on joindrait OS, on partagerait cette droite, au point S′, en parties proportionnelles à OA′ et à A′A, puis on tirerait S′A′, S′B′ et S′E′, et comme ces droites seraient parallèles respectivement à SA, SB et SE (219), on en conclurait que les triangles ASB et A′S′B′, ASE et A′S′E′, etc., sont semblables (1).

Théorème V.

14. Réciproquement, *deux polygones qui sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables.*

Plaçons, en effet, *les deux polygones de manière que deux angles homologues* A *et* A′ *de deux triangles semblables aient leurs côtés homologues parallèles et dirigés dans le même sens.* Il suit immédiatement de cette disposition et de ce que tous les triangles qui composent les deux polygones sont semblables chacun à chacun et semblablement placés, que tous les côtés homologues de ces triangles seront parallèles et dirigés dans le même sens. Ainsi l'égalité des angles ABC et A′B′C′, CBD et C′B′D′.... exige que les côtés BC et B′C′, CD et C′D′.... soient parallèles et dirigés dans le même sens. Mais ces côtés sont en outre proportionnels; donc, en vertu de la proposition du n° 226, les droites AA′, BB′ et EE′, iront se croiser en un même point O; de même CC′, ira concourir avec BB′ et EE′, c'est-à-dire en O et ainsi de suite, de sorte que les droites qui joignent les sommets homologues des deux polygones concourront en ce point O. Or, ces polygones ont de plus leurs côtés parallèles; donc tous leurs rayons vecteurs homologues issus de O sont proportionnels, et par conséquent ces polygones sont semblables.

15. Corollaire. *Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun, et semblablement placés.*

Théorème VI.

Fig. 119. 16. *Deux polygones* ABCDE *et* A′B′C′D′E′ *sont semblables lorsqu'en joignant les extrémités* F *et* G, F′ *et* G′ *de deux droites* FG *et* F′G′ *avec tous les sommets de ces polygones, les triangles ainsi formés sont semblables chacun à chacun et semblablement disposés.*

Plaçons, en effet, nos deux polygones de manière que deux angles homologues F et F′ des deux triangles semblables FAG et F′A′G′ aient leurs côtés homologues parallèles et dirigés dans

le même sens. On voit immédiatement qu'en vertu du théorème du n° 226 les trois droites FF′, AA′ et GG′ iront concourir en un même point O. Mais parce que les triangles BFG et B′F′G′ sont semblables et semblablement placés, FB et F′B′ seront parallèles; donc BB′ ira concourir avec FF′ et GG′, c'est-à-dire à ce même point O, et de même pour CC′, DD′ et EE′. Donc les droites qui joignent les sommets homologues des deux polygones concourent en un même point, et comme ces polygones ont de plus leurs côtés parallèles, puisque les points A′, B′, C′... divisent OA′, OB, OC... en parties proportionnelles (217), on voit que tous les rayons vecteurs homologues issus de O sont proportionnels et que, par conséquent, les deux polygones sont semblables.

Théorème VII.

17. *Les périmètres de deux polygones semblables sont proportionnels aux côtés homologues de ces polygones.*

Voyez le n° 265.

18. Les conditions de similitude de deux polygones doivent renfermer implicitement celles qui établissent que deux triangles sont semblables; mais on conçoit cependant que quelques-unes de ces conditions peuvent être une conséquence indispensable des autres. C'est ainsi, par exemple, que deux losanges sont semblables par cela seul qu'elles ont un angle égal (12). On a, en effet, reconnu que deux triangles sont semblables dans cinq cas que nous allons examiner successivement.

Théorème VIII.

19. *Deux triangles sont semblables quand ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

En effet, leurs côtés homologues sont proportionnels, de sorte que ces triangles satisfont ainsi aux conditions énoncées au n° 10.

On pourrait, au reste, démontrer cette proposition directement de la manière suivante :

Soient, en effet, ABC et A′B′C′ les deux triangles proposés. Fig. 242.
Prenons $AD = A'B'$, $AF = A'C'$, et joignons DF. Le triangle ADF sera égal à A′B′C′ (159) : car l'angle $A = A'$. Ainsi les angles homologues B′ et D seront égaux : donc $B = D$; donc les droites DF et BC sont parallèles, donc tous les rayons vecteurs menés de A à BC seront coupés en parties proportionnelles par DF; donc les triangles ABC et ADF ou A′B′C′ sont semblables.

Théorème IX.

20. *Deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles.*

Voyez le nº 250.

Théorème X.

21. *Deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés sont respectivement perpendiculaires.*

Voyez les nºˢ 251 et 252.

Théorème XI.

22. *Deux triangles* ABC, A′B′C′, *sont semblables lorsque leurs côtés sont proportionnels.*

Supposons les côtés AB, AC et BC proportionnels aux côtés respectifs A′B′, A′C′ et B′C′. Prenons, comme au nº 19, AD = A′B′, AF = A′C′, et joignons DF. Cette droite coupera donc les côtés AB et AC en parties proportionnelles, et sera par conséquent parallèle à BC : ainsi les triangles ADF et ABC seront semblables, et leurs côtés homologues seront proportionnels : on aura donc

$$AB : AD :: BC : DF.$$

Mais on a aussi, par hypothèse :

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :$$

donc, puisque AD = A′B′, ces deux proportions ont trois termes correspondants égaux, et ainsi leurs *quatrièmes* termes DF et B′C′ sont égaux. Il s'ensuit que le triangle A′B′C′ est égal à ADF (167), et par conséquent semblable à ABC.

Théorème XII.

23. *Deux triangles* ABC, A′B′C′, *qui ont un angle égal* A = A′ *compris entre côtés proportionnels* AB *et* A′B′, AC *et* A′C′, c'est-à-dire tels que l'on ait :

$$AB : A'B' :: AC : A'C',$$

sont semblables.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la scholie du nº 11. Au reste, on pourra la démontrer *à priori* en répétant la démonstration du nº 19.

§. II. *Des corps semblables.*

24. *Deux surfaces sont* semblables *lorsqu'on peut les placer de telle sorte qu'en menant par un même point des droites à tous*

leurs points, les rayons vecteurs dont les directions coïncident sont proportionnels.

Les corps terminés par ces surfaces sont aussi dits semblables.

25. Il suit immédiatement de cette définition que *si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base, la petite pyramide sera semblable à la grande* (465).

Théorème XIII.

26. *Lorsque deux surfaces sont semblables, on peut prendre pour centre de similitude de l'une tel point que l'on veut de l'espace, et il y aura toujours pour l'autre un centre correspondant de similitude.*

Même démonstration qu'au n° 4.

Théorème XIV.

27. *Deux cônes droits, deux troncs de cône droits à bases parallèles et deux cylindres droits, sont semblables, lorsqu'ils sont engendrés par des figures semblables tournant autour de deux côtés homologues.*

Même démonstration qu'au n° 6.

Théorème XV.

28. *Deux calottes, deux segments et deux secteurs sphériques sont semblables, lorsqu'ils correspondent à des surfaces coniques égales.*

Deux zones sont semblables, quand elles sont des différences de calottes semblables.

Deux tranches sphériques qui correspondent à des zones semblables sont semblables.

Même démonstration qu'au n° 6.

29. Corollaire. *Deux sphères sont toujours semblables.* Elles ont deux centres de similitude, dont chacun est le centre d'une surface conique tangente aux deux sphères (6).

Théorème XVI.

30. *Deux triangles sphériques sont semblables, quand ils correspondent à des trièdres égaux.*

Deux fuseaux et deux onglets qui correspondent à des angles dièdres égaux sont semblables.

Ceci est une conséquence immédiate de la définition des corps et des surfaces semblables.

Théorème XVII.

31. *Si deux corps sont semblables et que l'un soit un polyèdre, l'autre en sera aussi un ; ils auront chacun le même nombre de*

faces; ces faces seront semblables et semblablement disposées [1], *et leurs angles dièdres et polyèdres seront égaux chacun à chacun.*

Puisque ces deux corps sont semblables, on pourra les placer
Fig. 293. de manière qu'ils aient un même centre de similitude O. Par ce point et par chaque arête du polyèdre menons des plans, et nous formerons une série de pyramides ayant O pour sommet commun, et pour bases les différentes faces du polyèdre. Soient OABCDE une quelconque de ces pyramides, et A′, B′, C′, D′, E′, les points où ses arêtes percent la surface du second corps. Ces points, divisant ces arêtes en parties proportionnelles (24), sont dans un même plan parallèle à la base ABCDE (464), lequel divise dans le même rapport toutes les droites qui, issues de O, vont se terminer à cette base. Mais la surface du second corps jouit de la même propriété : donc la portion de cette surface qui est comprise dans la pyramide coïncide avec le polygone A′ B′ C′ D′ E′, et est par conséquent semblable à ABCDE : donc à chaque face du polyèdre correspond une face semblable du second corps, qui est ainsi un polyèdre, *et les sommets homologues de ces deux polyèdres sont situés sur des droites issues du point* O. En second lieu, tous les angles dièdres homologues sont égaux comme ayant leurs faces parallèles et dirigées dans le même sens; enfin tous les angles polyèdres seront égaux chacun à chacun, puisque les angles plans qui les forment étant des angles homologues de polygones semblables, ils ont ainsi leurs faces homologues égales, semblablement placées et également inclinées.

32. Scholie. Remarquons que l'on aurait pu prendre pour centre de similitude l'un quelconque des sommets du polyèdre, et qu'alors le centre de similitude du second eût été le sommet homologue de ce second polyèdre.

33. D'où il suit que *dans deux polyèdres semblables les arêtes et les diagonales homologues sont proportionnelles.*

Théorème XVIII.

34. Réciproquement, *deux polyèdres* P *et* P′ *sont semblables lorsqu'ils ont leurs faces semblables chacune à chacune, semblablement placées et également inclinées.*

Plaçons les deux polyèdres de manière que deux angles homo-

---

[1] C'est-à-dire, 1° que les deux angles dont le sommet commun est à l'une des extrémités de la droite qui assemble les deux faces du premier polyèdre auxquelles ils appartiennent, sont homologues de ceux dont le sommet commun est à l'une des extrémités de la droite qui assemble les deux faces semblables du second ; 2° que si l'on place l'une de ces deux faces sur sa correspondante de manière que deux côtés homologues coïncident, les deux autres faces seront d'un même côté du plan commun.

logues A et A' de deux faces semblables aient leurs côtés homologues parallèles et dirigés dans le même sens. Il suit immédiatement de cette disposition et de ce que ces deux faces sont équiangles entre elles, que tous leurs côtés homologues seront parallèles et dirigés dans le même sens. Mais ces côtés sont en outre proportionnels : donc les droites qui joindront les sommets homologues de ces deux faces concourront en un même point O, car le théorème du n° 226 est encore vrai quand les angles ne sont pas dans un même plan. Or, l'angle dièdre GABC est égal à G'A'B'C'; et comme les faces homologues sont semblablement placées par hypothèse, il s'ensuit que le plan A'B'F'G' est parallèle à ABFG et que les arêtes homologues de ces deux faces sont parallèles et dirigées dans le même sens. Puis donc qu'elles sont proportionnelles, FF' et GG' iront concourir avec AA' et BB', c'est-à-dire en O, et il en sera ainsi pour toutes les autres faces, de sorte que les droites qui joindront les sommets homologues des deux polyèdres concourront en ce point O. Or, ces polyèdres ont de plus toutes leurs faces parallèles : donc tous les rayons vecteurs homologues issus de O sont proportionnels, et par conséquent ces polyèdres sont semblables.

35. Corollaire. 1° *Tous les cubes sont semblables ;* 2° *deux parallélipipèdes rectangles qui ont leurs arêtes proportionnelles ;* 3° *deux parallélipipèdes obliques qui ont un angle trièdre égal compris entre des arêtes proportionnelles ;* 4° *deux prismes qui ont un angle trièdre compris entre les plans de trois polygones semblables chacun à chacun et semblablement placés sont semblables :* car toutes les faces latérales sont semblables chacune à chacune (12); et, comme elles sont d'ailleurs semblablement placées, leurs trièdres, et par conséquent leurs angles dièdres homologues, sont égaux.

36. Remarquons que le théorème précédent renferme plus de conditions qu'il n'en faut pour établir la similitude de deux polyèdres (608).

Théorème XIX.

37. *Deux polyèdres semblables quelconques peuvent être décomposés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune et semblablement placées* ([1]).

Nous pourrons d'abord décomposer l'un des polyèdres proposés en pyramides (605). Cela posé, en reprenant la démonstration du n° 31, on reconnaîtra que les deux polyèdres peuvent être placés de manière que leurs sommets homologues

(1) Voyez le renvoi de la page 296.

se trouvent sur des droites qui vont concourir en un même point O, qui est leur centre commun de similitude, et divisent ces droites en parties proportionnelles. Par conséquent, toutes leurs faces et tous leurs plans diagonaux homologues seront parallèles (464) : ainsi les pyramides formées par ces faces et ces plans sont semblables chacune à chacune et semblablement placées.

Si les pyramides dans lesquelles est décomposé le premier polyèdre avaient des sommets autres que ceux de ce polyèdre, tels que S, on joindrait OS, on partagerait cette droite au point S′ en parties proportionnelles à OA′ et à A′A, puis on ferait passer des plans par S′ et par les arêtes homologues à celles des pyramides dont le sommet est en S, et comme ces plans S′A′B′, S′A′E′... seraient parallèles respectivement à SAB, SAE..., on en conclurait que les pyramides telles que SABCDE et S′A′B′C′D′E′ sont semblables et ont le point O pour centre de similitude.

58. Scholie. Si l'on observe que deux pyramides quelconques peuvent être partagées en tétraèdres semblables et semblablement placés, on pourra donner du théorème précédent l'énoncé suivant :

Deux polyèdres semblables quelconques peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement placés.

Théorème XX.

59. Réciproquement, *deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de pyramides* SABCDE *et* S′A′B′C′D′E′, SABFG *et* S′A′B′F′G′..... *semblables chacune à chacune et semblablement placées sont semblables.*

Plaçons, en effet, *les deux polyèdres de manière que deux angles homologues* BAE *et* B′A′E′ *de deux pyramides semblables aient leurs côtés homologues parallèles et dirigés dans le même sens.* Il suit immédiatement de cette disposition et de la similitude des deux faces auxquelles ces angles appartiennent que tous les côtés homologues de ces faces seront parallèles et dirigés dans le même sens; mais ces côtés sont en outre proportionnels, donc les droites qui joindront leurs sommets homologues concourront en un même point O. Or, l'angle dièdre S′A′B′C′ est égal à SABC (50); donc le plan S′A′B′ est parallèle à SAB, et les arêtes homologues de ces deux faces semblables seront parallèles et dirigées dans le même sens; donc SS′ ira concourir avec AA′ et BB′, c'est-à-dire en O. Mais parce que les pyramides qui composent nos deux polyèdres sont semblables chacune à chacune et semblablement disposées, les angles

dièdres SABF et S′A′B′F′ sont égaux ; par suite, les faces ABFG et A′B′F′G′ auront leurs plans parallèles, leurs arêtes homologues parallèles, proportionnelles et dirigées dans le même sens ; de sorte que les droites FF′ et GG′ iront concourir avec AA′ et BB′, c'est-à-dire en O, et ainsi de suite. Nous voyons donc que les droites qui joignent les sommets homologues de nos polyèdres concourent en ce point O ; or, ces polyèdres ont, de plus, leurs faces parallèles ; donc tous les rayons vecteurs homologues issus de O sont proportionnels, et par conséquent ces polyèdres sont semblables.

40. Corollaire. *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de pyramides égales chacune à chacune et semblablement placées.*

41. Les conditions de similitude de deux polyèdres renferment implicitement celles qui établissent que deux tétraèdres sont semblables, mais on conçoit cependant que quelques-unes de ces conditions peuvent être une conséquence nécessaire des autres. C'est ainsi, par exemple, que deux prismes sont semblables par cela seul qu'ils ont un trièdre compris entre trois polygones semblables chacun à chacun et semblablement placés (35). On a effectivement reconnu que deux tétraèdres sont semblables dans quatre cas que nous allons examiner successivement.

Théorème XXI.

42. *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont leurs arêtes proportionnelles et que les faces formées par les arêtes homologues sont semblablement placées.*

Je prends, sur les arêtes SA, SB, SC, des parties SD, SE, SF, respectivement égales à S′A′, SB′, S′C′, et par les trois points D, E, F, je mène un plan. Ce plan sera parallèle à ABC, puisqu'il divise les arêtes du trièdre S en parties proportionnelles : donc le tétraèdre SDEF est semblable à SABC (25). Or, il est égal à S′A′B′C′ ; car les faces des deux tétraèdres proposés étant semblables chacune à chacune (247), les faces du trièdre S sont respectivement égales à celles du trièdre S′ ; et comme nous avons supposé qu'elles étaient semblablement placées, ces deux trièdres sont égaux ; de sorte que les tétraèdres S′A′B′C′ et SDEF sont superposables. Donc S′A′B′C′ est semblable à SABC. Fig. 251.

43 Corollaire. Si l'on forme un tétraèdre avec quatre sommets d'un polyèdre, et qu'on en forme un second avec les quatre sommets homologues d'un polyèdre semblable, ces deux tétraèdres seront semblables (33).

Théorème XXII.

44. *Deux tétraèdres* S A B C *et* S'A'B'C' *sont semblables, lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces* SAB *et* S'A'B', S A C *et* S'A'C' *semblables chacune à chacune et semblablement placées.*

Voyez le n° 611.

Théorème XXIII.

45. *Deux tétraèdres sont semblables, lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois dièdres égaux chacun à chacun, et dont les faces homologues sont semblablement placées.*

Voyez le n° 612.

Théorème XXIV.

46. *Deux tétraèdres sont semblables, lorsqu'ils ont leurs dièdres égaux chacun à chacun, et que leurs faces homologues sont semblablement placées.*

Voyez les n°s 613 et 614.

Théorème XXV.

47. *Si l'on coupe une surface conique par deux plans parallèles, les intersections seront des courbes semblables dont le rapport de similitude sera celui même des parties d'une même génératrice comprises entre ces plans et son centre, et dont les aires seront proportionnelles aux carrés des distances des plans sécants au centre de la surface.*

Fig. 237. Menons, en effet, par le centre S une droite quelconque S O; par cette droite, et une génératrice quelconque S A, un plan. Soient AO et A'O' ses traces sur les deux plans sécants. Les triangles S A O et S A' O' seront équiangles, et par conséquent le rapport $\frac{AO}{A'O'}$ sera égal à celui de S A à SA'. Mais ce dernier est constant (463) : donc le premier l'est aussi; donc les deux courbes d'intersection sont semblables, et leur rapport de similitude est effectivement $\frac{SA}{SA'}$.

Maintenant les aires des deux sections sont proportionnelles aux carrés des rayons vecteurs homologues A O et A'O', et par conséquent aussi aux carrés des lignes S O et SO'. Si donc on a mené SO perpendiculaire au plan A O B, la seconde partie du théorème est démontrée.

DE LA SYMÉTRIE.

48. *Deux surfaces sont* SYMÉTRIQUES *lorsqu'on peut les placer de telle sorte que toutes les droites menées par un certain point de l'espace vont les percer en des points deux à deux équidistants du point dont il s'agit. Ce point se nomme le* CENTRE DE SYMÉTRIE *des deux surfaces, qui alors sont dites symétriques par rapport à ce point.*

Les corps terminés par deux surfaces symétriques sont eux-mêmes symétriques.

49. Il suit immédiatement de cette définition que, *si l'on coupe deux angles polyèdres opposés par le sommet par deux plans parallèles et équidistants de ce sommet, les deux pyramides ainsi formées seront symétriques.*

THÉORÈME I.

50. *Lorsque deux surfaces sont symétriques, on peut toujours les placer de telle sorte que tel point qu'on voudra de l'espace soit leur centre de symétrie.*

En effet, puisque les deux surfaces sont symétriques, on peut toujours les placer de manière qu'en menant d'un certain point O des rayons vecteurs aux différents points A, B, C.... Fig. 294.
de la première, ces rayons, prolongés de quantités égales à eux-mêmes, aillent aboutir, en A′, B′, C′.... à la seconde surface. Le point O est leur centre de symétrie. Cela posé, prenons un point arbitraire F, et joignons FO, FA, FB, FC.... Menons A′I parallèle à AF, jusqu'à la rencontre de OF, et tirons B′I. On aura OI = OF, à cause de l'égalité des triangles AOF et A′OI (161) : donc les triangles OFB et OIB′ sont égaux (159); donc BI est égale et parallèle à BF; donc, si par les points A′, B′, C′...., on mène des parallèles A′A″, B′B″, C′C″.... à FI, jusqu'à la rencontre des lignes respectives AF, BF, CF.... ces parallèles seront égales à FI, et la surface qui sera le lieu de tous les points A″, B″, C″.... ne sera autre chose que la surface A′B′C′..... transportée parallèlement à elle-même. Mais FA″, FB″ FC″.... sont égales à IA′, IB′, IC′.... et partant à FA, FB, FC.... donc le point F est un centre de symétrie des deux surfaces ABC.... et A″B″C″....

THÉORÈME II.

51. *Deux corps symétriques peuvent être placés symétriquement par rapport à un plan donné quelconque,* c'est-à-dire de telle sorte que les points homologues de leurs surfaces seront situés à égales distances du plan dont il s'agit, sur une même perpendiculaire à ce plan.

Plaçons les deux corps symétriquement par rapport à un point quelconque O du plan donné MN, et menons par ce point une perpendiculaire OZ à ce plan.

Voyez n° 622.

THÉORÈME III.

52. Réciproquement, *si deux corps* ABC.... et A″B″C″.... *sont symétriques par rapport à un plan* MN, *ils pourront être placés symétriquement par rapport à un point quelconque* O *de ce plan, et, par suite, par rapport à tout point de l'espace.*

Voyez le n° 623.

53. Il résulte de la définition des corps symétriques et du théorème du n° 50, qu'il existe une grande analogie entre ces corps et les corps semblables. Le rapport de similitude est alors l'unité; mais les rayons vecteurs homologues, au lieu d'être dirigés dans le même sens, le sont ici en sens contraires. On conçoit, d'après cela, que si l'on introduit ces deux modifications dans les énoncés et dans les démonstrations des théorèmes que nous avons établis sur les corps semblables, on aura les énoncés et les démonstrations des propositions correspondantes des corps symétriques.

THÉORÈME IV.

54. *Si deux corps sont symétriques, et que l'un soit un polyèdre, l'autre en sera aussi un : ils auront chacun le même nombre de faces; ces faces seront égales chacune à chacune, et inversement placées; leurs angles dièdres seront égaux chacun à chacun, et leurs angles polyèdres seront symétriques* (31).

55. COROLLAIRE. *Dans deux polyèdres symétriques les arêtes et les diagonales homologues sont égales* (33).

THÉORÈME V.

56. Réciproquement, *deux polyèdres sont symétriques, lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune, inversement placées et également inclinées* (34).

57. COROLLAIRE. Deux triangles sphériques équilatéraux entre eux, sont symétriques lorsque leurs côtés homologues sont inversement placés.

THÉORÈME VI.

58. *Deux polyèdres symétriques peuvent être décomposés en un même nombre de pyramides symétriques chacune à chacune, et inversement placées* (37).

THÉORÈME VII.

59. Réciproquement, *deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de pyramides symétriques chacune à chacune et inversement placées, sont symétriques* (39).

DES LIMITES.

60. *On appelle* LIMITE *d'une quantité* VARIABLE *une quantité* FIXE *dont elle s'approche indéfiniment, c'est-à-dire de manière que leur différence puisse être rendue moindre que toute grandeur donnée, sans cependant se réduire jamais rigoureusement à zéro.* Ainsi, si une certaine quantité devient successivement égale à 0,9; à 0,99, à 0,999, à 0,9999, et ainsi de suite, elle prendra des valeurs qui différeront de moins en moins de l'unité et qui en différeront d'une quantité aussi petite que l'on voudra, si on compose sa valeur d'un nombre suffisant de chiffres 9, mais jamais elle ne sera rigoureusement égale à l'unité. Cette quantité a donc l'unité pour limite.

Si on partage une ligne AB en deux parties égales au point C; Fig. 295. puis que l'on divise CB aussi en deux parties égales; que l'on partage ensuite DB en deux parties égales, et ainsi de suite, on formera une suite de droites AC, AD, AE, AF.... qui s'approcheront de plus en plus de devenir égales à AB, et on pourra évidemment en trouver une qui diffère de cette droite d'aussi peu que l'on voudra, mais qui ne lui sera jamais rigoureusement égale, car il y aura toujours un intervalle entre le dernier point de division obtenu et le point B. La droite AB est donc la limite de la quantité variable qui aurait successivement pour valeurs AC, AD, AE, AF....

61. Il suit immédiatement de la définition précédente que *si deux quantités variables restent constamment égales entre elles, dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, leurs limites seront égales.*

Soient, en effet, a et b ces deux quantités variables, et A et B les limites vers lesquelles elles tendent respectivement : on pourra assigner à a et par conséquent à b, qu'on suppose lui être constamment égale, une valeur qui diffère de A d'aussi peu qu'on voudra; donc A est aussi une limite de b; donc A est égale à B, puisqu'il est évident qu'une même quantité ne peut pas tendre en même temps vers deux limites inégales.

62. *La limite de la somme ou de la différence de deux quantités variables est égale à la somme ou à la différence de leurs limites.*

Soient, en effet, a et b deux quantités variables dont les limites sont représentées par A et par B; on pourra poser

$$a=\mathrm{A}+\alpha \text{ et } b=\mathrm{B}+\beta,$$

α et β étant deux quantités susceptibles de décroître indéfiniment. Or, on tire de ces deux égalités

$$a\pm b=(\mathrm{A}\pm\mathrm{B})\pm(\alpha+\beta),$$

et par conséquent

$$(a \pm b) - (A \pm B) = \pm (\alpha + \beta);$$

mais $(\alpha + \beta)$ est une quantité susceptible de décroître indéfiniment; donc $(A \pm B)$ est la limite de $(a \pm b)$.

63. *La limite du produit de deux quantités variables est égale au produit de leurs limites.*

En employant les mêmes notations que tout à l'heure, on aura

$$ab = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta,$$

et par conséquent

$$ab - AB = A\beta + B\alpha + \alpha\beta.$$

Mais d'après la nature des quantités α et β, chacune des quantités $A\beta$, $B\alpha$ et $\alpha\beta$ peut être rendue moindre que toute grandeur assignable; il en est donc de même de leur somme; donc la limite de ab est AB.

64. *La limite du quotient de deux quantités variables est égale au quotient de leurs limites.*

On a en effet

$$\frac{a}{b} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B + \beta)}.$$

Or, le numérateur de cette différence peut être rendu aussi petit que l'on voudra, donc la limite de $\frac{a}{b}$ est $\frac{A}{B}$.

65. Les trois principes que nous venons d'établir sont presque évidents d'eux-mêmes, car il n'est personne qui ne conçoive très-bien que si les quantités a et b peuvent s'approcher des quantités respectives A et B, d'aussi près que l'on voudra, il en sera nécessairement de même du quotient $\frac{a}{b}$, par exemple, à l'égard du quotient $\frac{A}{B}$, de sorte que le second est la limite du premier. Aussi est-ce uniquement pour nous conformer à l'usage que nous avons rapporté les démonstrations précédentes.

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

1. *La* GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE *a deux objets : le premier de donner des méthodes pour représenter sur une feuille de dessin, qui n'a que deux dimensions,* savoir, longueur et largeur, *tous les corps susceptibles d'être définis rigoureusement.*

Le deuxième objet est de donner les moyens de reconnaître, d'après une exacte description graphique, les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leurs positions respectives.

C'est par la *méthode des projections* que l'on est parvenu à atteindre ce double but.

2. *Un point, une* DROITE *ou une courbe sont déterminés de position dans l'espace lorsque l'on connaît les projections de ce point* (G., **446**), *de cette droite ou de cette courbe* (G., **447**) *sur deux plans qui se coupent.* Soient, en effet, A et A′ les projec- Fig. 1.
tions d'un certain point sur les deux plans *fixes* LTH et LTV : si par le point A nous élevons une perpendiculaire au plan LTH, cette droite sera le lieu de tous les points qui se projettent en A sur ce plan (G., **434**), donc elle passera par le point dont il s'agit. Par une raison semblable, ce point devra se trouver sur la perpendiculaire élevée par le point A′ sur le plan LTV, donc il se trouvera au point *a* où ces deux perpendiculaires se rencontrent. Ainsi sa position est complétement déterminée.

Soient maintenant AB et A′B′ les projections d'une même droite (G., **448**) sur les deux plans LTH et LTV; si par la première on conduit un plan perpendiculaire à LTH, ce plan sera le lieu de toutes les droites qui ont AB pour projection sur LTH, donc il passera par la droite dont il s'agit; par une raison semblable, cette droite devra se trouver sur le plan élevé perpendiculairement à LTV, par la droite A′B′; donc elle se trouvera à l'intersection *ab* de ces deux plans. Ainsi sa position est entièrement déterminée.

Enfin soient PQR et P′Q′R′ les projections d'une même courbe. On construira deux surfaces cylindriques qui aient pour directrices les courbes PQR et P′Q′R′, et dont les génératrices soient respectivement perpendiculaires aux plans LTH et LTV : il est clair que la courbe inconnue devra se trouver sur chacune de ces deux surfaces, et par conséquent elle sera précisément leur intersection *pqr*. Donc sa forme et sa position dans l'espace sont complétement déterminées.

3. L'angle que font entre eux les plans de projection est tout à fait arbitraire : cependant les artistes qui font usage de la méthode des projections ont jugé plus commode de prendre les plans de projection perpendiculaires entre eux, et, à cause de la grande habitude qu'ils ont du niveau et du fil à plomb, ils ont coutume de supposer que l'un de ces deux plans soit horizontal et que l'autre soit vertical ; en conséquence, leur intersection LT se nomme *la ligne de terre.*

4. D'après cette convention, que nous adopterons, quand nous dirons désormais qu'un point ou une ligne sont donnés, nous entendrons que leurs *projections horizontale* et *verticale*, c'est-à-dire leurs projections sur un plan horizontal et sur un plan vertical fixés d'avance, sont connues.

5. Maintenant que nous savons déterminer la position d'un point ou d'une ligne dans l'espace, il convient d'indiquer le moyen de représenter ce point ou cette ligne sur une feuille de dessin. Pour y parvenir,

on suppose que le plan vertical LTV ait tourné autour de la ligne de terre LT, comme charnière, pour se rabattre sur le plan horizontal et ne former avec lui qu'un seul et même plan HV'.

La partie de la feuille de dessin située au-dessus de la ligne de terre LT représentera à la fois la portion supérieure du plan vertical et la portion postérieure du plan horizontal, tandis que la partie de cette feuille située au-dessous de LT représentera la portion antérieure du plan horizontal et la portion inférieure du plan vertical. Ainsi toutes les constructions, qui devraient être exécutées sur les deux plans de projection, se feront sur une seule feuille de dessin, et pour avoir les projections horizontales et verticales des points et des lignes situés dans l'espace, dans leur véritable position, il n'y aura qu'à relever le plan vertical, en lui faisant faire un quart de révolution autour de la ligne de terre LT.

6. Il suit immédiatement de la convention qui précède que *les projections horizontale et verticale de tout point de l'espace seront toujours figurées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.* Considérons, en effet, les deux plans de projection dans leur véritable position rectangulaire, le plan déterminé par les perpendiculaires aA et aA', abaissées du point a sur ces deux plans, sera perpendiculaire à la ligne de terre et par conséquent les coupera suivant deux perpendiculaires AO et A'O à cette ligne. Or, la seconde ne cessera pas d'être perpendiculaire à LT pendant le mouvement de rotation du plan LTV; donc, après le rabattement de ce plan sur LTH, la droite A'O sera devenue le prolongement même OA'' de AO; donc *les deux projections horizontale et verticale* A *et* A'' *du point a se trouveront alors sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, et on voit de plus que leurs distances* AO *et* A''O *à cette ligne sont égales aux distances de ce même point au plan vertical et au plan horizontal.*

7. Il est important de remarquer que *deux points* A et A″ *situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, sont nécessairement les projections d'un point déterminé de l'espace*, car si on relève le plan vertical et que par chacun des deux points donnés on mène une perpendiculaire au plan sur lequel il se trouve, ces perpendiculaires seront tout entières dans le plan A′OA perpendiculaire aux plans de projection, et par conséquent elles se rencontreront.

8. De même *deux droites qui, tracées sur les plans de projection, ne sont pas perpendiculaires à la ligne de terre, sont nécessairement les projections d'une droite dont la position dans l'espace est déterminée.* Mais si ces droites sont perpendiculaires à la ligne de terre et au même point, elles seront les projections de toutes les droites situées dans le plan mené par l'une d'elles perpendiculairement à LT, et par conséquent elles ne suffiront plus pour déterminer une droite.

9. Observons encore que *tous les points et toutes les lignes situés sur l'un des plans de projection se projettent sur l'autre plan, suivant la ligne de terre* (G., **479**).

10. Nous déterminerons la position d'un plan en nous donnant ses deux traces sur les plans de projection (G., **19**). Ces traces se croiseront nécessairement sur la ligne de terre, mais l'angle qu'elles formeront après le rabattement du plan vertical sera tout à fait différent de celui qu'elles forment dans l'espace.

Si le plan est perpendiculaire aux plans de projection, ses traces formeront une seule ligne droite perpendiculaire à la ligne de terre (G., **481**).

S'il est parallèle à l'un des plans de projection, sa trace sur l'autre est parallèle à la ligne de terre (G., **451**) et suffit pour le déterminer.

S'il est parallèle à la ligne de terre, ses deux traces sont parallèles à cette droite.

11. Nous conviendrons de noter par des *lettres sans*

accent les projections *horizontales* d'un point ou d'une droite, et par des *lettres accentuées* les projections *verticales;* de plus, pour désigner un point *a* de l'espace, nous écrirons entre parenthèses les deux lettres qui correspondent à ses projections; de sorte que (A, A') désigne le point *a* de l'espace qui a A et A' pour projection horizontale et pour projection verticale. Par analogie, on écrira (AB, A'B') pour indiquer la droite *ab* de l'espace qui a AB et A'B' pour projections horizontale et verticale.

12. On est convenu de représenter par *un trait plein et continu* les *données* et les *inconnues* d'un problème, lorsqu'elles seront *visibles;* mais si ces lignes sont *invisibles*, elles seront *ponctuées*, c'est-à-dire tracées en *points ronds*.

On suppose l'observateur placé au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical, et à une distance infinie de ces plans; alors les rayons visuels, menés de son œil aux projections d'un objet, peuvent être regardés comme étant perpendiculaires aux plans où ces projections sont tracées, de sorte que ces rayons visuels coïncident avec les droites par lesquelles on projette les différents points de cet objet. *Si* donc *une ligne est située au-dessous du plan horizontal ou derrière le plan vertical, on devra* la regarder comme invisible, et partant la PONCTUER. De même, *si une ligne se trouve cachée au spectateur par une surface qui fait partie des données de la question, cette ligne sera encore figurée en* POINTS RONDS.

Au contraire, TOUTES *les lignes de construction*, c'est-à-dire celles que l'on tracera pour parvenir à la détermination des inconnues d'un problème *seront* POINTILLÉES, c'est-à-dire formées de très-petits traits, *qu'elles soient visibles ou non.*

PROBLÈME I.

13. *Étant données les deux projections* AB *et* A'B' Fig. 2.

d'une droite, construire ses TRACES, *c'est-à-dire les points où elle perce les plans de projection* [1].

La trace horizontale de la droite donnée étant elle-même sa propre projection horizontale, doit ainsi se trouver sur AB : d'un autre côté, elle se projette verticalement et sur la ligne de terre LT et sur A'B' (9), c'est-à-dire au point C' où ces droites se coupent ; donc elle se trouve sur la perpendiculaire élevée par ce point à LT (6); donc elle est au point C. Donc, *pour construire la trace horizontale d'une droite, il faut prolonger la projection verticale de cette droite jusqu'à la ligne de terre; au point d'intersection, élever une perpendiculaire à cette ligne, et le point où cette perpendiculaire coupera la projection horizontale de la droite sera la trace cherchée.*

La trace verticale de la droite donnée étant elle-même sa propre projection verticale, doit ainsi se trouver sur A'B' : d'un autre côté, elle se projette horizontalement et sur la ligne de terre et sur AB, c'est-à-dire au point D, où ces droites se coupent ; donc elle se trouve sur la perpendiculaire élevée par ce point à LT; donc elle est au point D'. Donc *pour construire la trace verticale d'une droite il faut prolonger sa projection horizontale jusqu'à la ligne de terre; au point d'intersection, élever une perpendiculaire à cette ligne, et le point où cette perpendiculaire coupera la projection verticale de la droite, sera la trace cherchée.*

Problème II.

Fig. 2. **14.** *Par un point* M, M', *donné dans l'espace, me-*

---

(1) Avant d'entreprendre une *épure*, on trace, avec le plus grand soin et à l'aide d'un compas, deux droites qui soient rectangulaires (G., 127) et qui partagent chacune la feuille de dessin en deux parties égales. Ces deux droites serviront de directrices pour tracer avec une *équerre* la ligne de terre parallèlement à l'une d'elles (G., 131, 3°) ainsi que les droites qui devront lui être parallèles ou perpendiculaires.

ner une parallèle à une droite donnée (AB, A′B′) *et trouver la longueur d'une partie de cette droite comprise entre le point* (M, M′) *et un autre de ses points choisi arbitrairement.*

Nous avons vu (G., 459) que la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites situées dans l'espace soient parallèles, c'est que leurs projections, sur deux plans qui se coupent, soient elles-mêmes parallèles; ainsi les projections de la droite demandée doivent être parallèles à AB et à A′B′; mais, parce que cette droite doit être tirée par le point (M, M′), ses projections doivent passer par celles de ce point; nous les obtiendrons donc, en menant par M et par M′ des parallèles respectives ME et M′E′ à AB et A′B′.

Actuellement, d'un point quelconque N′ de M′E′, abaissons sur la ligne de terre une perpendiculaire que nous prolongerons jusqu'à la rencontre de ME, et le point (N, N′), ainsi déterminé, sera un point de notre parallèle. Il s'agira donc de trouver sa distance au point (M, M′), c'est-à-dire la longueur de la droite qui a pour projections MN et M′N′. Cette droite est le quatrième côté d'un trapèze formé par MN et les verticales qui projettent ses extrémités sur le plan horizontal : or, il est clair qu'en faisant tourner ce trapèze autour de MN, comme charnière, pour le *rabattre* sur le plan horizontal, ses angles M et N ne cesseront pas d'être droits, de sorte qu'on obtiendra son *rabattement* en élevant aux points M et N des perpendiculaires $Mm = FM'$ et $Nn = GN'$ (6), et, en joignant les points m et n. mn est donc la longueur demandée.

Il est clair que le prolongement de mn doit aller passer par la trace horizontale E de la droite (ME, M′E′). Cette remarque fournit une *vérification* de notre construction et donne le moyen de trouver l'inclinaison mM d'une droite donnée sur le plan horizontal. Il suffira, pour cela, de construire le rabattement horizontal d'un point de cette droite et de le joindre avec la trace

horizontale. On déterminerait d'une manière analogue l'inclinaison d'une droite sur le plan vertical.

On peut encore déterminer la longueur de la droite (MN, M'N') de la manière suivante : supposons, en effet, que l'on fasse tourner le plan qui projette cette droite horizontalement, autour de la verticale du point (M,M'), jusqu'à ce que ce plan soit devenu parallèle au plan vertical. Le point N sera venu se placer sur la parallèle MI à LT, en décrivant un arc de cercle, de sorte que le point (N, N') se projettera alors verticalement sur la perpendiculaire IK à LT ; mais il est clair que, dans ce mouvement, ce point restera toujours à la même hauteur, au-dessus du plan horizontal ; donc il se projettera aussi sur la parallèle N'K menée à LT par le point N', et, par conséquent, au point K. Ainsi, M'K sera actuellement la projection verticale de la distance demandée ; cette droite est donc égale à cette distance, puisque la droite (MN, M'N') étant maintenant parallèle au plan vertical est égale à sa projection sur ce plan.

Donc *la distance des deux points* (M,M') *et* (N,N') *est l'hypoténuse* M'K *d'un triangle rectangle* M'KO *dont la hauteur* M'O *est la différence des hauteurs des deux points au-dessus du plan horizontal et dont la base* KO *est égale à sa distance* MN *des projections horizontales de ces deux points.*

Problème III.

Fig. 3. **15**. *Par un point donné* (A, A'), *mener un plan parallèle à un autre plan donné par ses traces* PQ *et* QR'.

Lorsque deux plans sont parallèles, leurs traces sur un troisième sont parallèles et réciproquement ; ainsi, les traces du plan cherché doivent être parallèles à PQ et à QR', de sorte qu'elles seront déterminées si on peut obtenir un point de l'une d'elles, puisqu'elles doivent d'ailleurs concourir sur la ligne de terre. Pour y parvenir, je remarque que si l'on mène par le point

(A, A′) une parallèle à une droite quelconque située dans le plan PQR′, cette parallèle sera tracée dans le plan demandé (G., **453**); par conséquent, en construisant ses traces, on aura un point de chacune de celles du plan inconnu et on aura une vérification, en ce que les parallèles menées à PQ et à QR′ par les points trouvés, devront aller concourir sur LT.

Mais au lieu de prendre la *droite auxiliaire* parallèle à une droite *quelconque* tracée dans le plan PQR′, il sera beaucoup plus simple de la mener parallèlement à l'une des traces de ce plan, à sa trace horizontale, par exemple, qui est connue. En conséquence, on tirera par le point A une parallèle à PQ, et par le point A′ une parallèle à LT (**14**), car PQ est elle-même sa projection horizontale et a LT pour projection verticale (**9**); on construira ensuite (**13**) la trace verticale B′ de cette droite (AB, A′B′), et il ne restera plus qu'à mener par le point B′ une parallèle M′N à R′Q, puis, par le point N une parallèle NM à PQ, et le problème sera résolu.

Si l'on veut se fournir une vérification de la construction précédente, il n'y aura qu'à chercher un point de la trace horizontale du plan demandé, ce qui se fera en tirant, par le point (A, A′), une parallèle à la trace verticale du plan donné, et ce point devra se trouver sur MN.

16. Si les traces PQ et P′Q′ du plan donné sont parallèles à la ligne de terre, la construction précédente deviendra impossible, puisque la ligne auxiliaire sera aussi parallèle à LT et ne pourra pas en conséquence rencontrer les plans de projection. Il faudra donc tirer par le point (A, A′) une parallèle à une ligne quelconque tracée dans le plan donné; mais il sera encore plus simple de mener par le point (A, A′) un *plan de profil,* c'est-à-dire un plan perpendiculaire à la ligne de terre; ses traces OR et OR′ formeront une perpendiculaire à LT (**10**), laquelle coupera les traces du plan donné aux points P et P′. Par conséquent, l'intersection de ces deux plans sera la droite qui dans l'espace joindra Fig. 4.

P avec P′. Cela posé, je rabats le plan auxiliaire sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de OR; la trace verticale OR′ se rabattra sur OL et le point P′ viendra, en décrivant un quart de cercle, se placer en P″, de sorte que la trace du plan donné sur le plan de profil aura PP″ pour rabattement. Mais le point (A, A′), emporté par le plan auxiliaire, aura décrit aussi un quart de cercle dont A est le centre, A′O le rayon, et dont le plan est perpendiculaire à OR, de sorte qu'il se sera rabattu en A″; donc, si par ce point je tire une parallèle CD à PP″, cette droite CD sera le rabattement d'une droite menée par le point (A, A′) parallèlement à une droite située dans le plan donné. Or, quand on ramènera le plan de profil à sa position primitive, le point D, qui se trouve sur l'axe de rotation, ne variera pas; le point C décrira le quadran CD′; donc la parallèle menée par le point (A, A′) à la droite qui dans l'espace joint P et P′ perce les plans de projection en D et en D′: donc les traces du plan demandé sont les parallèles DS et D′S′ à la ligne de terre.

Problème IV.

Fig. 5. **17**. *Faire passer un plan par trois points donnés* (A, A′), (B, B′) et (C, C′).

Joignez les trois points donnés deux à deux par des lignes droites qui seront évidemment tout entières dans le plan inconnu, de sorte qu'en construisant les traces horizontales D, E, F, et les traces verticales D′, E′, F′ de ces droites (**13**), vous aurez trois points de chacune des traces du plan cherché, et, par conséquent, elles seront plus que déterminées. Vous joindrez donc D et F, D′ et F′ par deux droites qui résoudront le problème, et vous aurez trois vérifications, puisqu'elles devront passer respectivement par E et par E′, et aller concourir sur LT.

Il sera également facile de *faire passer un plan par un point et une droite donnés*, car il n'y aura qu'à prendre deux points sur cette droite, par exemple, ses deux traces pour revenir au problème précédent.

Problème V.

18. *Construire l'intersection des deux plans donnés par leurs traces* PQ et QR′, PS *et* SR′. Fig. 6.

Le point P, où se croisent les traces horizontales des deux plans, est évidemment le point où leur commune intersection perce le plan horizontal ; de même le point R′ est la trace verticale de cette droite : mais le point P a pour projection verticale le pied A′ de la perpendiculaire PA′ à la ligne de terre ; le point R′ a, pour projection horizontale, le point B de cette même ligne ; donc, en tirant les droites R′A′ et PB, on aura les projections verticale et horizontale de l'intersection demandée.

Ainsi, *pour construire la projection horizontale de l'intersection de deux plans, abaissez une perpendiculaire sur la ligne de terre, du point où se croisent leurs traces verticales, et joignez le pied de cette perpendiculaire avec le point où leurs traces horizontales se rencontrent. Vous déterminerez la projection verticale de cette intersection par une construction analogue.*

19. Si les traces des plans donnés PQP′ et RSR′ ne peuvent pas se couper dans les limites de l'épure, la règle que nous venons de donner sera inapplicable. Dans ce cas, on mènera un *plan auxiliaire* parallèlement à l'un des plans de projection, au plan vertical par exemple, et il est clair que ses traces, sur les plans donnés, se croiseront sur leur intersection, de sorte qu'en construisant ces traces, on obtiendra un point de cette intersection. Soit donc AB la trace horizontale de notre plan auxiliaire : les droites suivant lesquelles il coupera PQP′ et RSR′ seront des parallèles à QP′ et à SR′, issues respectivement de A et de B; donc elles auront C′F′ et D′F′ pour projections verticales. Donc, si de F′ on abaisse sur LT une perpendiculaire que l'on prolongera jusqu'à la rencontre de AB, on aura un point (F, F′) de l'intersection demandée, et en répé- Fig. 7.

tant cette construction, on en obtiendra un second point, ce qui achèvera de le déterminer.

Fig. 6. **20.** Supposons que le plan RSR′ se meuve de telle manière que sa trace verticale restant fixe, sa trace horizontale tende à devenir parallèle à celle du plan PQP′, les points P et A′ s'éloigneront ainsi indéfiniment des points respectifs B et R′, en décrivant les droites QP et LT, de sorte que, à la limite, PB et R′A′ seront devenues parallèles, l'une aux deux traces horizontales, et l'autre à la ligne de terre. Et, en effet, dans l'hypothèse actuelle, les deux plans étant conduits suivant deux parallèles QP et US, leur intersection leur est parallèle (G., **444**); par conséquent ses projections BC et R′C′ sont parallèles à celles de ces droites, c'est-à-dire à ces mêmes droites et à la ligne de terre.

Observons toutefois que si les traces horizontales des deux plans donnés étaient perpendiculaires à la ligne de terre, la projection verticale de leur intersection se réduirait au point R′ (G., **481**).

21. Si les traces horizontales et verticales des deux plans donnés étaient parallèles, la construction que nous avons donnée (**18**) deviendrait impossible, mais aussi les deux plans seraient parallèles, et par conséquent il n'y aurait plus d'intersection. Il y a toutefois un cas où cette construction ne pourrait pas s'effectuer, bien que les
Fig. 8. deux plans se coupent, c'est celui où leurs traces PQ et P′Q′, RS et R′S′, seraient toutes quatre parallèles à la ligne de terre. Alors leur intersection sera aussi parallèle à LT, ainsi que ses projections; de sorte qu'il suffira, pour les déterminer, de trouver un point de chacune d'elles. Or, si l'on mène un plan de profil (**16**) MOM′, ses intersections avec les plans donnés seront les droites qui, dans l'espace, joindront P et P′, R et R′. Cela posé, rabattons le plan MOM′ sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de OM, sa trace verticale OM′ se rabattra sur OL, et les points P′ et R′ de cette droite viendront se placer en P″ et en R″, de sorte que les traces des plans donnés sur le

profil auront pour rabattements PP″ et RR″, et par conséquent le point A″, où elles se croisent, est le rabattement du point où l'intersection des deux plans donnés perce le plan MOM′. Si donc on abaisse A″A perpendiculairement sur OM et qu'on ramène le plan auxiliaire à sa position primitive, ce point A″ décrira un quart de cercle dont A sera le centre et A″A le rayon, et ainsi se projettera horizontalement en A et verticalement sur OM′ à une distance de O égale à A″A. Les parallèles AB et A′B′ menées à la ligne de terre par A et par A′ résoudront le problème.

Remarquons qu'au lieu de prendre le plan auxiliaire perpendiculaire à la ligne de terre, on aurait pu l'assujettir à la seule condition de couper les deux plans donnés, mais les constructions auraient été beaucoup moins simples.

22. Enfin il peut arriver que les traces CP et CP′, CR et CR′ des deux plans rencontrent la ligne de terre au même point C. Coupez encore les plans donnés par un plan de profil que vous rabattrez ensuite sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace sur ce plan; vous obtiendrez ainsi les rabattements PP″ et RR″ des traces des plans donnés sur le profil, de sorte qu'en ramenant celui-ci à sa position primitive, le point A″ où elles se coupent sera projeté en A et en A′. Mais les projections de l'intersection doivent évidemment passer par le point C; donc ces projections sont CA et CA′. Fig. 9.

Problème VI.

23. *Construire le point d'intersection d'une droite* (AB, A′B′) *avec un plan donné* PQR′. Fig. 10.

Si, par la droite donnée, nous conduisons un plan quelconque, il est clair que le point où elle percera le plan PQR′ appartiendra à la trace de ce plan auxiliaire sur le plan donné, et qu'en conséquence les projections du point demandé se trouveront à la fois sur les projections de cette trace et sur celles de la

droite donnée, de sorte qu'elles seront ainsi déterminées. La première chose à faire est donc de mener un plan par la droite (AB, A′B′).

Pour plus de simplicité dans les constructions, nous prendrons pour plan auxiliaire celui même qui projette cette droite horizontalement; AB sera donc sa trace horizontale, et BB′, perpendiculaire élevée à LT par le point B′, sera sa trace verticale (G., **481**). On construira la projection verticale R′D′ de l'intersection des deux plans PQR′ et ABR′ (**18**), et le point M′, où elle rencontrera A′B′, sera la projection verticale du point d'intersection de la droite (AB, A′B′) avec le plan PQR′, de sorte qu'en abaissant de M′ la perpendiculaire M′M sur LT on déterminera la projection horizontale M de ce même point.

On obtiendra une vérification si l'on prend pour plan auxiliaire le plan qui projette (AB, A′B′) verticalement, parce que la projection horizontale de la trace de ce plan sur PQR′ devra passer par le point M.

Remarquons que, dans notre figure, la partie (MA, M′A′) de la droite (AB, A′B′) est tout entière au-dessus du plan PQR′, et par conséquent est visible, tandis que la partie (MB, M′B′) de la même droite est invisible, parce qu'elle est au-dessous de ce plan : voici pourquoi l'une est figurée par un *trait plein*, et que l'autre est *ponctuée*.

Fig. 11. **24**. Si la droite donnée (A, A′B′) est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, la trace horizontale du plan auxiliaire ne sera assujettie qu'à la seule condition de passer par le point A, et ce qu'il y aura de mieux à faire sera de la diriger parallèlement à la trace horizontale du plan donné; soient donc AC et CC′ les traces de ce plan : la projection verticale de son intersection avec PQR′ sera la parallèle C′M′ à la ligne de terre (**20**), de sorte que A et M′ sont les deux projections du point cherché.

25. Il est bon de remarquer que cette construction

donne la solution de ce problème : *Étant donnée l'une des projections d'un point appartenant à un plan, trouver l'autre projection de ce point.* On voit, en effet, que le point du plan PQR', qui se projette horizontalement en A, est l'intersection même de ce plan avec la verticale menée par le point A.

26. Si la droite donnée était parallèle à la ligne de terre, on construirait encore la projection verticale de la droite suivant laquelle le plan PQR' est coupé par le plan qui la projette horizontalement (**19**). Fig. 12.

27. Si le plan donné est perpendiculaire à la ligne de terre, ses traces formeront une perpendiculaire à LT, et les points où cette perpendiculaire rencontrera les projections de (AB, A'B') seront la réponse à la question.

28. Si l'on veut résoudre le problème du n° **25**, en employant un plan auxiliaire quelconque, on observera que ses traces n'étant assujetties qu'à la seule condition de passer par les traces horizontale et verticale C et C' de la droite (AB, A'B'), on tirera par le point C une droite quelconque OCP, et en joignant le point C' avec le point où cette droite rencontre LT, on aura les traces d'un plan POR', qui contiendra la droite donnée, puisqu'elle aura deux points dans ce plan. On construira donc l'intersection (PD, R'D') de ce plan avec le plan PQR', et le point (M, M') commun à cette droite et à (AB, A'B') résoudra le problème. La droite MM' devra être perpendiculaire à LT, ce qui fournit une vérification. Fig. 13.

Problème VII.

29. *D'un point donné* (A, A') *abaisser une perpendiculaire sur un plan donné* PQR' *et trouver la longueur de cette perpendiculaire.* Fig. 14.

Nous avons vu (G., **482** et **483**) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, c'est que ses projections sur deux plans qui se coupent, soient perpendiculaires aux traces

du plan donné sur ces plans; ainsi les projections de la droite demandée doivent être perpendiculaires à PQ et à QR′; mais, parce que cette droite doit être tirée par le point (A, A′), ses projections doivent passer par celles de ce point : nous les obtiendrons donc en menant par A et par A′ les perpendiculaires respectives AB et A′B′ sur PQ et sur QR′.

Pour trouver ensuite la longueur de la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point (A, A′) et le plan PQR′, il n'y aura qu'à chercher (**23**) l'intersection (M, M′) de la droite (AB, A′B′) avec ce plan, et la question sera ramenée à trouver la distance des deux points (A, A′) et (M, M′). En conséquence, on mènera par le point M′ une parallèle à la ligne de terre, on prendra sur cette droite, à partir de AA′, une distance CM″ = AM, et en joignant A′M″ on aura la longueur demandée (**14**).

Fig. 15. **30**. Supposons que les traces PQ, P′Q′ du plan donné soient parallèles à la ligne de terre, on mènera par le point (A, A′), un plan de profil que l'on rabattra ensuite sur le plan horizontal; la trace du plan de profil sur le plan donné et le point (A, A′) auront ainsi pour rabattements la droite PP″ et le point a (**16**), de sorte qu'en abaissant de ce point a la perpendiculaire am sur cette droite, on aura la longueur de la perpendiculaire demandée. Pour obtenir la projection du pied de cette droite, on ramènera le plan auxiliaire à sa position primitive. Dans ce mouvement, le point m décrira un quadran dont le rayon sera la perpendiculaire mM abaissée de m sur l'axe de rotation, de sorte que le pied de notre perpendiculaire se projettera horizontalement en M et verticalement en M′ à une distance de la ligne de terre égale à mM.

Problème VIII.

Fig. 16. **31**. *D'un point donné* (C, C′) *abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée* (AB, A′B′) *et trouver la longueur de cette perpendiculaire.*

Si par le point donné on mène un plan perpendiculaire à la droite donnée (AB, A′B′) et qu'on joigne le point d'intersection de ce plan et de cette droite avec le point (C, C′), on aura évidemment résolu la première partie de la question, et la seconde ne présentera aucune difficulté (**14**).

Il s'agit donc de *mener par un point donné* (C, C′) *un plan perpendiculaire à une droite donnée* (AB, A′B′).

Les traces du plan inconnu doivent être perpendiculaires aux projections de la droite donnée (G., **482**) : d'où l'on voit qu'elles seront déterminées si l'on peut obtenir un point de l'une d'elles, puisqu'elles doivent d'ailleurs concourir sur la ligne de terre. Pour y parvenir, je remarque que si l'on mène par le point (C, C′) une parallèle à la trace horizontale du plan demandé, cette droite sera située dans ce plan, de sorte qu'en construisant le point où elle percera le plan vertical, on aura un point de la trace verticale du plan cherché. Or, les projections de cette *droite auxiliaire* doivent être parallèles à celles de la trace horizontale de notre plan, donc en menant par C une perpendiculaire CD à AB et par C′ une parallèle C′D′ à la ligne de terre, on aura ces projections. On cherchera donc la trace verticale de (CD, C′D′) et en tirant ensuite R′D′Q et PQ perpendiculairement à A′B′ et à AB, on aura les traces du plan demandé. Il ne restera donc plus qu'à construire l'intersection (M, M′) de la droite (AB, A′B′) avec le plan PQR′, à joindre cette intersection avec le point (C, C′) et à trouver la distance de ces deux points.

32. Si la droite donnée (A, A′B′) est perpendiculaire au plan horizontal, le plan qui lui sera mené perpendiculairement par le point (C, C′) sera horizontal et sera par conséquent déterminé par sa trace verticale (**10**), laquelle passera par C′, puisqu'elle est le lieu des projections verticales de tous les points du plan; donc (A, M′) sera le point d'intersection du Fig. 17.

plan auxiliaire avec la perpendiculaire demandée; CA et C′M′ seront donc les projections de cette droite et CA en sera la longueur.

Fig. 18. **33.** Si la droite donnée (AB, A′B′) est parallèle à la ligne de terre, les traces du plan auxiliaire se confondront avec la droite qui joint les projections du point (C, C′), de sorte que CM et C′M′ seront les projections de la perpendiculaire demandée; on prendra donc M′M″ = CM, et en joignant C′M″ on aura la longueur de cette perpendiculaire.

34. On peut résoudre le problème du n° **31** par la *méthode* dite *des rabattements*, dont nous avons déjà donné quelques applications et avec laquelle il est important de se familiariser.

Fig. 19. Par le point (C, C′) et la droite (AB, A′B′) conduisons un plan D′QA, ce qui se fera en joignant ce point à la trace horizontale (A, A′) de la droite donnée, puis en tirant une première droite D′B′Q par les traces verticales de (AC, A′C′) et de (AB, A′B′), et une seconde par les points Q et A. Il est clair alors que, en rabattant ce plan sur le plan horizontal, avec la droite (AB, A′B′) et le point (C, C′), il n'y aura plus aucune difficulté pour abaisser de ce point une perpendiculaire sur cette droite. Or, quand le plan D′QA tournera autour de sa trace horizontale QR, le point B′ décrira un arc de cercle dont le plan sera perpendiculaire à cette trace, de sorte que ce point viendra se rabattre sur la perpendiculaire abaissée de B sur AQ. Mais comme le point Q restera immobile, sa distance au point B′ ne variera pas; donc ce point B′ se rabattra au point b, où la perpendiculaire indéfinie BE est coupée par l'arc décrit de Q comme centre avec QB′ pour rayon; donc le rabattement de la droite donnée est Ab, puisqu'elle n'a fait que tourner autour de A. Si on prend sur Qb une distance Qd = QD′, et qu'on joigne Ad, on aura de même le rabattement de la droite (AD, A′D′), de sorte qu'en abaissant du point C une perpendiculaire sur l'axe de rotation AQ,

le point c où elle coupera Ad sera le rabattement du point donné (C, C′). Par conséquent, en abaissant cm perpendiculairement sur Ab, on aura la longueur de la perpendiculaire demandée.

Actuellement, pour déterminer la projection de cette perpendiculaire nous ramènerons le plan AQD′ à sa position primitive. Dans ce mouvement, le point m décrira un arc de cercle dont le plan sera perpendiculaire à l'axe de rotation AQ, de sorte que, quand il sera revenu à sa position primitive, il se projettera horizontalement sur l'intersection M de AB avec la perpendiculaire abaissée de m sur AQ. On aura donc la projection verticale M′ de ce point en tirant la perpendiculaire MM′ à la ligne de terre.

55. Remarquons que la solution que nous venons de donner du problème VIII renferme celle de cet autre problème, *trouver l'angle formé par les traces d'un plan* B′QA, car cet angle est égal à bQA. Ainsi, pour résoudre ce problème, il faut rabattre le plan donné, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale, par exemple, construire le rabattement d'un point quelconque de la trace verticale, et joindre ce rabattement avec le point de la ligne de terre où se joignent les deux traces.

Problème IX.

56. *Construire les angles rectilignes correspondants aux angles dièdres qu'un plan donné* PQR′ *forme avec les plans de projection.* Fig. 20.

Il est clair que si nous menons un plan perpendiculaire à PQ l'angle que formeront ses traces sur le plan horizontal et sur le plan donné, sera l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre de ces deux plans. La trace horizontale de notre plan auxiliaire est une perpendiculaire AO menée à PQ par un point quelconque de cette droite (G., **482**), et sa trace verticale sera la perpendiculaire A′O élevée au point O sur la ligne de terre. Donc, la droite, qui dans l'espace joindra les points A

et A' sera la trace de notre plan auxiliaire sur PQR'. Cette droite est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont OA et OA' sont les deux autres côtés. Pour construire ce triangle, il n'y aura qu'à le rabattre sur le plan vertical, en le faisant tourner autour de OA'; le point A décrira l'arc AA'', et en joignant $A'A''$ on obtiendra l'angle demandé $A'A''O$.

On aurait construit le rabattement de notre triangle sur le plan horizontal, en élevant sur AO la perpendiculaire $OA''' = OA'$ et en joignant $A'''A$.

On construira semblablement l'inclinaison OBA ou $OB'A^{\text{IV}}$ du plan PQR' sur le plan vertical.

Si les traces du plan donné étaient parallèles à la ligne de terre, le plan auxiliaire deviendrait un plan de profil, et les angles demandés seraient ceux du triangle formé par les traces de ce plan sur le plan donné et sur les plans de projection.

Problème X.

Fig. 21. **37**. *Construire l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre formé par deux plans donnés* PQR' *et* PSR'.

Si nous menons un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans donnés, ses traces sur ces plans et sur le plan horizontal formeront un triangle, dans lequel l'angle opposé au côté horizontal sera l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre cherché. Or, la trace horizontale de notre plan auxiliaire doit être perpendiculaire à la projection horizontale de l'intersection des deux plans PQR' et PSR' : nous construirons donc cette projection PA, et la perpendiculaire BC menée, à cette droite, par l'un quelconque de ses points, pourra être considérée comme la base de notre triangle. Son sommet, qui est un point de l'intersection des plans PQR' et PSR', se projette sur AP, d'où il suit que si on le joint au point D, la droite ainsi tracée sera la hauteur de notre triangle (G., **439**). Si donc nous pouvons

déterminer cette hauteur, il n'y aura qu'à la porter sur DP, à partir du point D, pour avoir le rabattement du sommet, car, dans le mouvement de rotation du plan auxiliaire autour de sa trace horizontale BC, ce point décrira un arc de cercle qui a le point D pour centre et dont le plan est perpendiculaire à BC. Or, la hauteur de notre triangle est la perpendiculaire abaissée du point D sur la droite qui, dans l'espace, joint les points P et R', puisque cette droite, intersection des deux plans, est perpendiculaire au plan de ce triangle. Mais cette droite est aussi l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont PA et AR'; en conséquence, je rabats ce triangle sur le plan vertical, en le faisant tourner autour de R'A; les points P et D viennent ainsi se placer en P' et en D', de sorte qu'en menant D'D'' perpendiculairement à R'P' j'aurai la hauteur cherchée. Je prendrai donc DE = D'D'', et, en joignant EB et EC, je formerai l'angle demandé AEC.

Si les traces horizontales des plans donnés sont parallèles, il n'y aura rien de changé à la construction précédente, sinon que l'hypoténuse R'P' deviendra infinie, c'est-à-dire parallèle à la ligne de terre, de sorte que la hauteur de notre triangle sera R'A.

Si les traces PQ et P'Q', RS et R'S' des deux plans sont parallèles à la ligne de terre, le plan auxiliaire deviendra un plan de profil MOM'; on le rabattra donc sur le plan horizontal, et l'angle PA''R, formé par les rabattements PP'' et RR'' de ses traces sur les deux plans donnés, sera l'angle demandé (**21**). Fig. 8.

38. Si l'on veut *mener un plan qui partage en deux parties égales l'angle dièdre formé par les plans* PQR' *et* PSR', on remarquera que la trace de ce plan bissecteur sur le plan auxiliaire doit partager l'angle que nous venons de construire en deux parties égales; donc la bissectrice de l'angle BEC sera le rabattement de la trace dont il s'agit, de sorte que le plan demandé doit passer par le point F, car lorsque l'on ramènera le plan Fig. 21.

auxiliaire à sa position primitive, la droite EF tournera autour de ce point F; d'un autre côté, ce plan doit aussi passer par le point P; donc PFG est sa trace horizontale, et par conséquent R'G est sa trace verticale.

Problème XI.

Fig. 22. **39.** *Construire l'angle de deux droites données.*

Nous avons vu (G., **468**) que lorsque deux droites ne se rencontraient pas, on mesurait leur inclinaison mutuelle par l'angle formé par l'une d'elles avec une parallèle menée par un de ses points à l'autre : nous pourrons donc supposer que l'on ait effectué cette construction ([1]), et nous proposer en conséquence de trouver l'angle formé par les deux droites (AB, A'B') et (BC, B'C') qui se coupent au point (B, B'). Si l'on joint les traces horizontales A et C de ces deux droites, on formera un triangle dont AC sera la base et dont l'angle au sommet (B, B') sera l'angle cherché. Si donc on abaisse la perpendiculaire BD sur sa base, et qu'on joigne le point D avec le sommet, on aura la hauteur de ce triangle (G., **439**); de sorte que si on rabat le plan de ce triangle sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de AC, son sommet viendra se placer sur DB, à une distance de D égale à cette hauteur; car il décrira un arc de cercle qui aura pour centre le point D et dont le plan sera perpendiculaire à AC. Mais cette droite est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont BD est la base et B'E la hauteur : ainsi nous la déterminerons en prenant sur la ligne de terre une distance EF = BD et en joignant B'F. Il ne s'agira donc plus que de porter B'F de D en *b* sur DB et de tirer *b*A et *b*C. L'angle A*b*C résoudra le problème.

40. Si les droites données (AB, A'B') et (AC, A'C')

([1]) Deux droites ne se coupent pas, lorsque la droite qui joint le point d'intersection de leurs projections verticales avec le point où se coupent leurs projections horizontales, n'est pas perpendiculaire à la ligne de terre (6).

se croisaient sur le plan horizontal, on mènerait par un point quelconque de l'une une parallèle à l'autre, et la question serait ramenée à trouver l'angle formé par cette parallèle et par la première droite.

41. Si l'on suppose que la seconde droite tourne autour du point (B,B′) et tende à devenir parallèle au plan horizontal, en conservant la même projection horizontale; sa projection verticale tendra à devenir parallèle à la ligne de terre, de sorte que le point C s'éloignera indéfiniment sur la projection BC, donc à la limite, c'est-à-dire quand la seconde droite sera parallèle au plan horizontal, la droite AC sera devenue parallèle à BC, et il est clair, en effet, qu'un plan conduit suivant une parallèle au plan horizontal, doit couper ce plan suivant une parallèle à cette droite et par suite à sa projection horizontale. On mènera donc par le point A une parallèle AC″ à BC, et on achèvera la construction comme précédemment. Fig. 23.

Problème XII.

42. *Construire l'angle formé par une droite* (AB, A′B′) *avec un plan donné* PQR′. Fig. 24.

D'un point quelconque (B, B′) de la droite donnée, j'abaisse une perpendiculaire (BC, B′C′) sur le plan PQR′ et il est clair que l'angle formé par ces deux droites sera le complément de celui que la droite donnée forme avec sa projection sur ce plan, c'est-à-dire qu'il sera le complément de l'angle demandé (G., **469**). On construira donc l'angle AbC des droites (AB, A′B′) et (BC, B′C′), et en élevant au point b une perpendiculaire bG sur Ab, on obtiendra l'angle demandé AbG.

Problème XIII.

43. *Trouver la plus courte distance de deux droites* (AB, A′B′) *et* (CD, C′D′) *qui ne sont pas situées dans un même plan.* Fig. 25.

Nous avons démontré au n° **467** de la Géométrie,

que cette plus courte distance était la perpendiculaire commune aux deux droites données, et que, pour la construire, il fallait mener par un point quelconque de
Fig. 25 *bis.* *cd* une parallèle *cf* à la droite *ab*, d'un point quelconque *b* de celle-ci abaisser une perpendiculaire *bg* sur le plan *fcd*; par le pied *g* de cette perpendiculaire, mener *gi* parallèlement à *ab* et par le point *i* tirer la parallèle *ik* à *cd*. Nous allons donc exécuter ces diverses constructions qui, comme on le voit, ne sont que des applications de problèmes résolus précédemment.

On commencera par déterminer les traces (**13**) de la droite (CD, C′D′); par sa trace verticale, on tirera la parallèle (CF, C′F′) à la droite (AB, A′B′), on cherchera la trace horizontale F de cette parallèle, et en joignant DFQ et QC′ on aura les traces du plan *fcd*. De la trace horizontale B de (AB, A′B′), on abaissera la perpendiculaire (BG B′G′) sur ce plan (**31**), puis ayant déterminé le pied (G, G′) de cette perpendiculaire (**23**), on mènera par ce point la parallèle (GI, G′I′) à la droite (AB, A′B′), laquelle coupera (CD, C′D′) au point (I, I′), de sorte que la droite II′ devra être perpendiculaire à la ligne de terre, ce qui fournira une vérification de toutes les constructions précédentes. On mènera ensuite (IK, I′K′) parallèlement à (BG, B′G′), et les projections K et K′ du point où elle coupera la droite (AB, A′B′) devront encore se trouver sur une perpendiculaire à la ligne de terre. Cette droite (IK, I′K′) est la perpendiculaire demandée, de sorte que, pour en trouver la vraie grandeur, il n'y aura qu'à prendre sur l'horizontale tirée par le point K′ une longueur NM = IK et à tirer la droite I′N qui résoudra le problème.

44. Remarquons que si les projections des deux droites données ne sont point parallèles, et si la droite qui joint le point d'intersection de leurs projections verticales avec celui où se croisent leurs projections horizontales n'est pas perpendiculaire à la ligne de

terre, ces deux droites ne seront pas dans un même plan (**39**, ([1]), et G., **459**).

PROBLÈME XIV.

45. *Étant donnés trois des six éléments d'un trièdre, déterminer les trois autres par une construction graphique.*

On distingue dans un trièdre six éléments, savoir : ses trois faces et ses trois angles dièdres, de sorte que l'énoncé du problème présente six questions à résoudre : car on peut donner successivement,

1° Les trois faces;

2° Deux faces, et l'angle dièdre compris;

3° Deux faces, et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles;

4° Une face, et les deux angles dièdres adjacents;

5° Une face, et deux angles dièdres dont l'un est opposé à cette face;

6° Les trois angles dièdres.

Or ces six questions peuvent se réduire à trois : car si l'on donnait, par exemple, les trois angles dièdres A, B, C d'un trièdre ([1]), les faces du trièdre supplémentaire vaudraient respectivement $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$. Si donc on savait résoudre la première question, on pourrait déterminer les angles dièdres de ce trièdre supplémentaire, de sorte qu'en en prenant les suppléments, on aurait les faces du trièdre proposé ([2]).

([1]) Nous conviendrons de représenter par A, B, C, les angles dièdres d'un trièdre quelconque, et par *a, b, c,* les faces opposées de ce trièdre, de sorte que *a,* par exemple, représente la face opposée à l'angle dièdre A.

([2]) Remarquons que pour qu'on puisse former un trièdre avec trois angles dièdres donnés A, B et C, il ne suffit pas que la somme de ces trois angles soit comprise entre deux droits et six droits (G., 495), il faut encore que la plus grande face du trièdre supplémentaire soit plus petite que la somme des deux autres, de sorte que si A est le plus petit des trois angles dièdres A, B et C, on devra avoir $180°-A<180°-B+180°-C$,

Ainsi la sixième et la première question se réduisent à une seule. Il en est de même de la cinquième et de la troisième, ainsi que de la quatrième et de la seconde. Nous n'aurons donc à nous occuper que des trois premiers problèmes.

46. Première question. *Étant données les trois faces a, b, c d'un trièdre, construire les angles rectilignes correspondants à ses angles dièdres.*

Fig. 26. Si l'on fait sur un plan quelconque un angle $ASB=c$, et ensuite les deux angles $ASC'=b$ et $BSC''=a$, on pourra regarder ces deux derniers angles comme les rabattements des faces b et a sur le plan de la première c. Si donc on prend les deux distances égales SC' et SC'', et qu'on abaisse des points C' et C'' les perpendiculaires $C'AO$ et $C''BO$ sur SA et sur SB, lorsqu'on aura ramené les angles b et a à leur position primitive, les points C' et C'' viendront se réunir en un seul, que j'appellerai C, et, comme les droites $C'A$ et $C''B$ n'auront pas cessé d'être perpendiculaires à SA et à SB, elles formeront alors avec AO et BO des angles CAO et CBO, qui seront les angles rectilignes correspondants aux angles dièdres SA et SB.

Pour construire le premier, j'observe que dans le mouvement de rotation de la face b autour de SA, le point C décrit une circonférence qui a pour centre et pour rayon le point A et la droite $C'A$, et dont le plan est perpendiculaire à SA (G., **433**). Si donc on fait tourner ce plan autour de sa trace $C'AO$, le point C viendra se rabattre sur le plan ASB, en un certain point de la circonférence $C'C_1$. Mais dans ce mouvement la droite CO, intersection des deux plans CAO et CBO, ne cessera pas d'être perpendiculaire (**481**) sur AO : donc elle se rabattra sur la perpendiculaire C_1O à AO, de sorte que le point C se trouvera alors en C_1. L'angle

---

ou ce qui revient au même $A>(B+C)-180°$, c'est-à-dire que *le plus petit angle doit surpasser l'excès de la somme des deux autres sur deux droits.*

C_1AO est donc le rabattement de CAO, et est ainsi l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre SA.

On verra de la même manière que l'angle C_2BO correspondant à l'angle dièdre SB, s'obtiendra, en joignant le point B avec le point C_2, intersection de la perpendiculaire élevée au point O sur OB avec la circonférence décrite du point B comme centre, avec le rayon BC''.

On aura une vérification de l'exactitude des constructions si les deux droites OC_1 et OC_2 sont égales.

Enfin, pour avoir le troisième angle dièdre SC, il n'y aura qu'à prendre pour plan de développement celui de la face b ou celui de la face a. Mais il sera *en général* plus simple de concevoir par le point C un plan perpendiculaire à la troisième arête SC. Ses traces sur les plans des deux faces a et b, formeront un angle, qui sera l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre SC, et leurs rabattements sur le plan de développement seront les perpendiculaires $C'D$, $C''E$ aux droites SC' et SC''; et, comme dans le mouvement des faces a et b, les points D et E sont restés immobiles, puisqu'ils se trouvent sur les deux axes de rotation, on voit que la droite DE est la trace du plan dont il s'agit sur ASB. Si donc on le rabat sur ce dernier, en le faisant tourner autour de DE, les distances du point C aux points D et E resteront égales à $C'D$ et à $C''E$; de sorte que le rabattement du point C sera le point γ, intersection des arcs décrits avec ces rayons : donc l'angle $D\gamma E$ est le troisième angle demandé.

Remarquons toutefois que si l'angle b, par exemple, était droit ou obtus, la trace du plan perpendiculaire à l'arête SC, sur le plan de cette face, serait parallèle à SA, ou ne la rencontrerait que dans son prolongement. Dans le premier cas la construction ne serait plus possible, et dans le second l'angle DCE pourrait être le supplément de l'angle demandé.

Si la construction est possible, les trois points S, O et γ doivent se trouver sur une même droite perpen-

diculaire à DE. En effet, puisque le plan CDE est perpendiculaire à la droite SC, sa trace DE sur ASB doit être perpendiculaire à la projection SO de cette droite sur ce plan (G., **482**). Donc la droite, qui joint le point C avec I, est perpendiculaire sur DE (G., **439**); donc son rabattement Iγ l'est aussi; donc ce rabattement est le prolongement de SOI.

Le problème que nous venons de résoudre sera toujours possible si la somme des trois angles *a, b, c* est moindre que quatre droits, et si la plus grande de ces trois faces est plus petite que la somme des deux autres (G., **504**).

47. Seconde question. *Étant donnés deux faces b et c, et l'angle dièdre* A *qu'elles comprennent, déterminer la troisième face et les deux autres angles dièdres.*

Cette question se réduit à trouver la troisième face: car alors on pourra construire les deux angles dièdres inconnus, par le problème précédent.

Fig. 27. Faisons sur un plan quelconque deux angles ASB$=c$ et C′SA$=b$; on pourra regarder celui-ci comme le rabattement de la face b sur le plan de c. Si donc on abaisse d'un point quelconque C′ de SC′ la perpendiculaire C′AO sur SA, lorsqu'on aura ramené la face b à sa position primitive, la droite C′A formera avec AO un angle qui sera l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre SA. Mais, dans le mouvement de rotation de la face b autour de SA, le point qui est rabattu en C′, et que nous appellerons C, décrit une circonférence dont A est le centre et C′A le rayon : si donc on fait tourner son plan autour de sa trace C′AO, le point C viendra se rabattre sur le plan ASB, en un certain point de la circonférence C′C_1; mais, dans son mouvement, l'inclinaison de CA sur AO ne changera pas; donc, cette droite se rabattra sur la ligne AC_1, qui fait, avec AO, un angle égal à l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre SA, de sorte que le point C se trouvera alors en C_1; par conséquent, si l'on abaisse de ce point la

perpendiculaire C_1O sur AO, le point O sera la projection de C sur le plan ASB. Donc, si l'on joint C avec le pied de la perpendiculaire OB à SB, la droite CB sera aussi perpendiculaire à SB; de sorte que, quand la troisième face sera rabattue sur le plan ASB, le point C se trouvera sur le prolongement de OB; mais sa distance au point S, qui appartient à la charnière SB, n'aura pas varié; ainsi, ce point sera aussi sur la circonférence SC'; donc il sera déterminé par leur intersection C''; de sorte que BSC'' sera le rabattement de la troisième face.

48. Troisième question. *Étant donnés deux faces a et c, et l'angle dièdre* A *opposé à la première, déterminer la troisième face et les deux autres angles dièdres.*

Ce problème se réduit encore comme le précédent à la détermination de la troisième face *b*.

Faisons encore, sur un plan, l'angle ASB $= c$ et BSC''$= a$; on pourra regarder ce dernier comme le rabattement de la face *a* sur le plan de *c*. Cela posé, si on conçoit un plan vertical BA' perpendiculaire à SA et qu'ayant fait dans ce plan l'angle KA'B, égal à l'angle rectiligne correspondant à l'angle dièdre donné A, le plan conduit suivant les droites A'K et SA sera celui même de la face inconnue. Si donc on ramène la face *b* à sa position primitive, l'arête SC'' viendra se placer dans le plan KA'S. Mais, dans ce mouvement, le point C'', déterminé par la perpendiculaire BC'' à SB, décrira un arc de cercle dont le plan sera vertical et aura pour trace horizontale la droite C''BA : donc il s'arrêtera sur l'intersection de cet arc de cercle avec le plan KA'S. Mais cette intersection contient évidemment le point K, où la verticale élevée en B rencontre A'K, donc cette intersection est la droite qui joint ce point K au point A, de sorte qu'elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont BA et BK. Nous ferons donc, aux points B et A', deux angles, l'un droit et l'autre égal à l'angle rectiligne cor- Fig. 28.

respondant à l'angle dièdre A, nous rabattrons BK′ en BK″ sur SB, et, en tirant AK″, nous aurons le rabattement de l'intersection du plan SA′K avec celui de l'arc de cercle décrit par le point C″, de sorte qu'en décrivant du centre B la circonférence C″MM$_1$, l'un ou l'autre des deux points où elle coupera AK″ sera le rabattement d'un point de l'arête opposée à la face *c*.

Actuellement, si l'on fait tourner le plan de la troisième face autour de SA, comme charnière, pour l'abattre sur le plan ASB, les distances du point C, supposé rabattu en M, aux points A et S de la charnière, ne varieront pas; de sorte que ce point viendra se placer au point C′, intersection des arcs AM et SC″; donc C′SA est la troisième face correspondante au point M.

On trouverait de la même manière l'angle C$_1$SA pour la troisième face correspondante au point M$_1$.

On voit ainsi que le problème admettra en général deux solutions. Cependant, si les deux points de section de la droite AK″ avec la circonférence BC″ étaient situés de part et d'autre du point A, il n'y aurait qu'une solution; car, en construisant le trièdre déterminé par le point de section situé à gauche de A, l'angle dièdre dont l'arête est SA, serait le supplément de A. Si la droite AK″ était tangente à la circonférence, il n'y aurait plus qu'une solution, et il n'y en aurait aucune si cette droite et cette circonférence ne se rencontraient pas.

Remarquons que si l'on ramenait le plan C″MM$_1$ à sa position primitive, les points M et M$_1$ se projetteraient en P et en P$_1$; de sorte que la troisième face, en venant se rabattre sur le plan ASB, les emportera sur les prolongements des perpendiculaires abaissées de P et de P$_1$ sur SA; donc, ces perpendiculaires doivent aller passer par les points respectifs C′ et C$_1$, ce qui fournit une vérification de l'exactitude des constructions.

PROBLÈME XV.

49. *Réduire un angle à l'horizon.*

Dans l'arpentage, on a souvent à construire la projection horizontale de l'angle formé par deux droites inclinées sur l'horizon, c'est ce que l'on appelle réduire un angle à l'horizon. Or, si l'on imagine par leur point de concours une verticale, et que l'on mesure les angles qu'elle forme avec chacune des deux droites dont il s'agit, on aura les trois faces d'un trièdre dont l'angle dièdre, qui a pour arête la verticale, a pour angle rectiligne correspondant la projection horizontale de la face opposée, c'est-à-dire de l'angle proposé. Il sera donc facile d'obtenir cette projection (**46**).

On réduit encore un angle à l'horizon de la manière suivante, qui est fort simple :

Supposez que SC représente la verticale et SA et SB les deux côtés de l'angle à réduire à l'horizon; tracez les trois angles B′SC, CSA, ASB″, respectivement égaux aux trois angles observés, et menez la perpendiculaire indéfinie LT à SC; vous pourrez la regarder comme la trace d'un plan horizontal sur celui de la face verticale CSA. Or, dans le mouvement de rotation des deux faces autour des charnières SC et SA, les distances des points S, C et A de ces charnières à la trace B de la troisième arête sur ce plan n'ont pas varié; donc, SB′ et B′C sont ces deux premières distances; et si, ayant pris SB″ = SB′, on joint AB″, cette droite sera la troisième, car le triangle ASB″ est évidemment égal au triangle ASB (G., **159**). Si donc on décrit des centres C et A les arcs B′B et B″B, le triangle ACB sera égal au triangle formé par les traces des faces du trièdre S sur le plan horizontal (G., **167**); de sorte que l'angle B′CB sera égal à la projection horizontale de l'angle observé ASB, et, par conséquent, sera cet angle *réduit à l'horizon*. Fig. 29.

Si l'une des deux droites, SA par exemple, est horizontale, la construction précédente deviendra im- Fig. 30.

possible. Faites encore les angles CSB′, CSA et ASB″ égaux respectivement aux trois angles observés, menez toujours le plan horizontal LT, et la trace horizontale de la droite SB sera encore sur l'arc dont le rayon est CB′. Cela posé, concevez que du point B, où l'autre côté de l'angle à réduire perce le plan horizontal LT, on ait abaissé une perpendiculaire sur SA, et vous formerez un triangle rectangle que vous construirez en prenant SB″ = SB′ et menant la verticale B″A. Mais si vous ramenez ce triangle à sa position primitive, en le faisant tourner autour de SA, le point B″ viendra se placer sur le prolongement de la verticale B″A, et par conséquent au point B, où elle rencontre l'arc BB′: donc l'angle demandé est B′CB.

Problème XVI.

Fig. 31. **50**. *Mener un plan tangent à une surface conique, par un point donné sur cette surface.*

Nous déterminerons la surface conique proposée en nous donnant sa trace horizontale ACBD, que nous supposerons ici être une circonférence de cercle, et les projections S et S′ de son centre. Cette surface sera ainsi complétement déterminée, car nous pourrons construire telle génératrice que nous voudrons, puisqu'il suffira, pour cela, de joindre le sommet avec un point quelconque de la courbe ACBD.

Cela posé, si nous menons du point S deux tangentes SA et SB à la circonférence ACBD, et que nous concevions deux plans par ces droites et par le sommet du cône, ces plans seront tangents à la surface conique, puisque d'ailleurs ils contiendront respectivement les génératrices qui passent par A et par B (G., **527**); mais ils sont verticaux, donc les tangentes SA et SB seront les limites de la projection horizontale de la surface conique; car il est évident que toutes les génératrices doivent se projeter entre ces deux lignes [1].

---

[1] Il suit de là que pour un spectateur situé à une distance

On verra de la même manière que si nous menons à la circonférence ACBD deux tangentes qui soient perpendiculaires à la ligne de terre, les projections verticales S′C′ et S′D′ des génératrices correspondantes aux points C et D seront les limites de la projection verticale de la surface conique ([1]).

Supposons que le point par lequel le plan tangent doit être mené soit donné par sa projection horizontale M ; il s'agira de trouver la projection verticale de ce point. Or la génératrice sur laquelle il est situé se projette horizontalement suivant SM, donc la trace de cette génératrice est le point E ou le point F, donc il appartient à la génératrice qui a pour projection verticale S′E′ ou S′F′ ; donc sa projection verticale est le point M′ ou le point M″ (6). Ainsi il y a deux points (M, M′) et (M, M″), qui se projettent horizontalement en M.

Proposons-nous de mener le plan tangent par le premier de ces points. Sa trace horizontale sera la tangente PQ à la circonférence ACBD, et comme ce plan doit contenir la génératrice (SE, S′E′), sa trace verticale sera déterminée, en joignant le point Q au point (G, G′), où cette génératrice perce le plan vertical.

Si le point (G, G′) sort des limites de l'épure, on mènera par le point (M, M′) une parallèle (MI, M′I′) à la trace horizontale du plan tangent, et en joignant le point Q au point I′ on aura la trace verticale de ce plan, car il doit contenir notre droite auxiliaire. Si le point (G, G′) se trouve dans les limites de l'épure, la construction précédente fournira une vérification du tracé du plan tangent.

---

infinie au-dessus du plan horizontal, les génératrices qui aboutissent sur la partie BCA de la circonférence sont seules *visibles*.

([1]) Ainsi les génératrices qui aboutiront à la demi-circonférence CBD seront *invisibles* pour un spectateur placé à une distance infinie du plan vertical.

On construira semblablement le plan tangent au point (M, M''), et comme les plans PQR et P'Q'R' renferment chacun une génératrice, ils passeront par le point (S, S'), de sorte que les projections de leur intersection devront passer l'une par S et l'autre par S', ce qui fournira une vérification de toutes les constructions.

Problème XVII.

51. *Mener un plan tangent à une surface conique, par un point donné hors de cette surface.*

Le plan demandé devant contenir une génératrice, passera nécessairement par le centre de la surface conique : donc les traces de la droite qui joindra ce centre avec le point donné appartiendront aux deux traces de notre plan tangent; mais sa trace horizontale doit être tangente à la base du cône, donc elle est déterminée, et par conséquent sa trace verticale l'est aussi.

Problème XVIII.

52. *Mener un plan tangent à une surface conique et qui soit parallèle à une droite donnée.*

Comme le plan demandé doit passer par le sommet du cône, on voit que la parallèle, menée par ce sommet à la droite donnée, sera tout entière dans le plan tangent, de sorte que les points où elle percera les plans de projection appartiendront aux traces horizontale et verticale de ce plan; mais la première de ces traces doit être tangente à la base du cône, donc elle est déterminée, donc la première l'est aussi.

Problème XIX.

53. *Mener un plan tangent à une surface cylindrique*, 1° *par un point donné sur cette surface* (par une de ses projections); 2° *par un point donné hors de cette surface;* 3° *parallèlement à une droite donnée.*

Une surface cylindrique pouvant être regardée comme

une surface conique dont le centre s'est éloigné indéfiniment, on voit que les solutions du problème actuel ne sont que des cas particuliers des problèmes analogues que nous venons de résoudre pour la surface conique. Nous observerons seulement que, dans le troisième cas, la parallèle menée à la droite donnée par le centre de la surface conique devenant tout à fait indéterminée, il faudra mener par un point de cette droite une parallèle aux génératrices de la surface cylindrique, dont la direction est une des données de la question ; le plan déterminé par ces deux droites sera parallèle au plan tangent (G., 458), de sorte que la trace horizontale de ce dernier sera une tangente menée à la base du cylindre parallèlement à la trace horizontale du plan auxiliaire. Cette trace sera donc déterminée, et par conséquent l'autre le sera aussi.

Nous engageons les élèves à exécuter les épures des problèmes XVII, XVIII et XIX. Ils auront soin de déterminer d'abord les limites de la projection horizontale et de la projection verticale de la surface conique ou cylindrique, ce qui leur fera distinguer les parties de ces surfaces qui seront visibles de celles qui ne le seront pas.

Problème XX.

54. *Mener un plan tangent à une surface de révolution, par un point donné sur cette surface.* Fig. 32.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'on ait pris, pour plan horizontal, un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, et nous déterminerons alors la surface proposée par la trace horizontale O de cet axe et par la projection verticale A′B′C′D′ de l'intersection de cette surface par un plan parallèle au plan vertical, projection qui sera égale à cette intersection. Il est évident, en effet, que la projection d'un polygone sur un plan parallèle au sien est égale à ce polygone, et que cette proposition étant vraie indépendamment de la grandeur de ses côtés et de ses angles, elle le sera encore lorsque ce polygone dégénérera en une ligne

courbe. Menons à la courbe A′B′C′D′, que nous supposerons être une ellipse [1], deux tangentes EB′ et FD′ perpendiculaires à LT, leurs prolongements seront aussi tangents à la circonférence décrite du point O comme centre, avec un rayon égal à O′B′. Cette circonférence sera la limite de la projection horizontale de la surface, de même que A′B′C′D′ est celle de sa projection verticale.

Cela posé, soit M la projection horizontale du point donné. La trace du plan de la courbe méridienne, sur laquelle ce point est situé, est donc la droite OM. Supposons que l'on fasse tourner ce plan autour de l'axe jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle au plan vertical de projection, la méridienne se projettera alors sur

---

(1) L'ELLIPSE *est une courbe telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes, que l'on appelle ses* FOYERS, *est égale à une même droite, nommée son* GRAND AXE. Ainsi, Fig. 32 *bis.* pour décrire une ellipse dont F et F′ seraient les foyers et a le grand axe, on tirera par ces deux points une ligne droite sur laquelle on prendra, à partir du milieu O de FF′, deux distances OA et OA′ égales à $\frac{a}{2}$ et les points A et A′ appartiendront à l'ellipse. Puis des points F et F′, comme centres et avec un rayon quelconque AC, mais plus grand que FA, on décrira quatre arcs de cercle que l'on coupera par quatre autres décrits des points respectifs F′ et F avec CA′ pour rayon, et les quatre points M, M′, M″, M‴, appartiendront à l'ellipse. En répétant cette construction, on trouvera autant de points que l'on voudra de cette courbe, de sorte que pour la tracer il ne s'agira plus que d'unir tous ces points par un trait continu. Si les deux rayons sont égaux à OA, on obtiendra les deux points B et B′, et la distance BB′ s'appellera le *petit axe* de l'ellipse qui est évidemment symétrique de part et d'autre de ses deux axes.

Pour mener une tangente à l'ellipse au point M, on joindra ce point à l'un des foyers F′, par une droite que l'on prolongera d'une longueur F′D = FM, et on abaissera de M une perpendiculaire MT sur DF. Ce sera la tangente demandée. Il suit de cette construction que les tangentes aux points A et A′ sont parallèles au petit axe et que les tangentes aux points B et B′ le sont au grand.

A′B′C′D′, et, comme le point M aura décrit dans ce mouvement l'arc MN, sa projection verticale devra être alors l'un des deux points N′ ou N″, où A′B′C′D′ est rencontrée par la perpendiculaire NN′N″ à LT. Mais si l'on ramène le méridien à sa position primitive, le point cherché décrira un arc de cercle qui, parce que son plan sera horizontal, se projettera verticalement sur la parallèle menée à LT par le point N′ ou par le point N″; donc enfin la projection verticale du point cherché sera l'un ou l'autre des deux points M′ ou M″. Ainsi il y a deux points (M, M′) et (M, M″) de la surface proposée qui ont le point donné M pour projection horizontale.

Proposons-nous de mener le plan tangent par le point (M, M′). Il sera déterminé par les tangentes menées en ce point à la méridienne et au parallèle sur lesquels il est situé. Donc ses traces passeront par les traces de ces deux droites.

Le parallèle ayant la circonférence MN pour projection horizontale, sa tangente au point (M, M′) se projettera horizontalement suivant la tangente MG à cette circonférence [1], et verticalement suivant la droite N′M′, trace verticale de son plan. Donc elle perce le plan vertical au point G′.

Pour construire la tangente à la méridienne au point (M, M′), je ramène son plan à être parallèle au plan vertical de projection. Le point (M, M′) viendra ainsi se placer sur (N, N′) : la tangente en ce point aura alors

---

[1] *Si l'on projette sur un même plan, le plan horizontal par exemple, une courbe* CMB (G., fig. 239), *et sa tangente* MT, *les projections de ces deux lignes seront elles-mêmes tangentes.* Concevons en effet que l'on fasse passer par cette courbe et par la tangente un cylindre et un plan verticaux, leurs traces A′M′B′ et M′T′ sur le plan de projection seront la projection de la courbe et de sa tangente; mais notre plan vertical étant tangent au cylindre (G., 507) doit renfermer la tangente M′T′ mené au point M′ de A′M′B′; cette tangente doit aussi se trouver dans le plan de la courbe, donc elle n'est autre que M′T′.

pour projection verticale la tangente N′H′ à la courbe A′B′C′D′, et pour projection horizontale la droite DB, de sorte que sa trace horizontale sera actuellement le point H. Mais en ramenant notre méridien à sa véritable position, cette trace H viendra se placer en I, en décrivant l'arc HI, de sorte que notre tangente perçant le plan horizontal en I et passant par (M, M′) aura M′I′ et MI pour projections.

Notre plan tangent est maintenant déterminé; car, puisqu'il est perpendiculaire au méridien (G., **591**), sa trace horizontale doit être perpendiculaire à ce plan (G., **481**). En conséquence, on tirera par le point I une perpendiculaire à la trace OI de ce méridien et on joindra ensuite le point où elle coupera la ligne de terre avec le point G′.

Pour avoir une vérification des constructions précédentes, il n'y aura qu'à chercher la trace verticale de la tangente (MI, M′I′) au méridien, et cette trace devra se trouver sur la trace verticale du plan tangent.

Si l'on remarque que les droites N′H′ et M′I′ vont concourir sur OO′, car, dans son mouvement, la tangente (NH, N′H′) n'a pas cessé de couper l'axe au même point, on verra que le plan tangent doit passer par le point (O, K′); d'où il suit que si l'on joint le point K′ avec le pied P′ de la perpendiculaire abaissée sur LT du point P, où DB prolongée coupe la trace horizontale du plan tangent, cette droite K′P′ sera la projection verticale de l'intersection de ce plan par le vertical OP, donc elle devra être parallèle à la trace verticale du plan tangent, ce qui founira une nouvelle vérification.

Observons enfin que les normales (G., **519**), menées par tous les points d'un parallèle, vont couper l'axe de révolution au même point; car si, dans le plan d'un méridien CMD (G., fig. 233), on mène une perpendiculaire ME à la tangente MT à cette courbe, cette droite ME sera la normale à la surface au point M (G., **479**), donc elle sera perpendiculaire sur la tan-

gente MV au parallèle MM′Q; mais quand la méridienne CMD tournera autour de CD, le point M décrira ce parallèle et la droite ME ne cessera pas d'être perpendiculaire aux deux tangentes MT et MV, c'est-à-dire d'être normale à la surface de révolution.

Il suit de là que si par le point N′ on tire la perpendiculaire N′Q′ à la tangente N′H′, et que l'on joigne Q′M′, cette droite sera la projection verticale de la normale au point (M, M′), et par conséquent elle devra être perpendiculaire à la trace verticale du plan tangent (G., 482), ce qui nous donne encore un moyen très-simple de vérification. Fig. 32.

En répétant pour le point (M, M″) les constructions que nous avons exécutées pour le point (M, M′), on obtiendra les traces du plan tangent en ce point, et la symétrie de la figure montre clairement que le point d'intersection des traces verticales des deux plans tangents, ainsi que ceux où se croiseront les projections verticales des tangentes aux points (N, N′) et (N, N″), (M, M′) et (M, M″) seront situés tous trois sur la droite D′B′.

Problème XXI.

35. *Mener un plan tangent à une sphère par une droite donnée.*

Si d'un point A (G., fig. 56) on mène une tangente AT à une circonférence, puis, que l'on fasse tourner la figure autour du diamètre AO, il est clair que la droite AT décrira une surface conique circonscrite à la sphère engendrée par le demi-cercle BTC; que la *courbe de contact* sera une circonférence qui aura pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée de T sur AO, pour rayon cette perpendiculaire, et dont le plan sera perpendiculaire à AO. On voit, en outre, que tout plan tangent à ce cône le sera à la sphère, car il contiendra deux tangentes à cette dernière surface, savoir: une génératrice du cône et une tangente à la courbe de contact.

Fig. 33. Ces principes établis, nous supposerons que les deux plans de projections passent par le centre de la sphère, de sorte que le rabattement de la trace verticale de la surface sphérique coïncidera avec sa trace horizontale. Il suffira, pour résoudre le problème, de concevoir un cône circonscrit à la sphère, et dont le sommet serait un point de la droite donnée (AB, A′B′), et de mener par cette droite un plan tangent à ce cône.

Or, si l'on prend la trace horizontale de la droite (AB, A′B′) pour sommet de ce cône, les génératriçes horizontales de sa surface seront les tangentes AC et AD à la circonférence, de sorte que sa ligne de contact avec la sphère sera la circonférence décrite sur CD comme diamètre dans le plan vertical CD; donc les points où les plans demandés toucheront la sphère, seront deux points de cette circonférence. Si donc on fait, pour la trace verticale (B, B′) de la droite donnée, la même construction que pour (A, A′), on aura une seconde courbe qui devra contenir les points de contact, de sorte qu'ils seront ainsi déterminés.

Pour les obtenir, j'observe d'abord que la droite qui joint ces points a pour projections horizontale et verticale CD et F′E′, de sorte qu'elle perce les plans de projection aux points I et G′, or, si je rabats le plan vertical du cercle CD sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de CD, ce point G′ viendra se placer en G″ sur une perpendiculaire à CD et à une distance de G égale à GG′; mais le point I n'aura pas varié, donc la *corde de contact* se trouvera rabattue sur IG″; et, par conséquent, ses extrémités, c'est-à-dire les points de contact se trouveront à l'intersection de cette droite avec la circonférence CD, c'est-à-dire en m et en n. Pour avoir les projections de ces points, je ramène le plan mobile à sa position primitive, et les points m et n viennent ainsi se projeter horizontalement sur les pieds M et N des perpendiculaires abaissées de m et de n sur l'axe de rotation CD; donc leurs projections verticales sont les points M′ et N′, où les perpendicu-

laires MM′ et NN′ à LT rencontrent E′F′, de sorte que, pour achever la solution du problème, il n'y aura qu'à faire passer des plans par la droite (AB, A′B′) et par chacun des points (M, M′) et (N, N′); mais le plan tangent à la sphère étant perpendiculaire sur le rayon qui va au point de contact, il sera plus simple de construire les projections des rayons menés aux points de tangence, et d'abaisser ensuite des points A et B′ des perpendiculaires respectivement sur leurs projections horizontales et sur leurs projections verticales. Il y aura une vérification, parce que les deux traces de chaque plan devront se croiser sur la ligne de terre.

Problème XXII.

56. *Circonscrire un cercle à un triangle donné dans l'espace, par les projections de ses sommets* (A, A′), (B, B′), (C, C′). **Fig. 34.**

On conduira d'abord un plan PQR′ par ces trois points, puis on fera tourner ce plan autour de sa trace horizontale, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur le plan horizontal, et on construira ainsi le rabattement *abc* du triangle que les trois points donnés forment dans l'espace. Pour cela, on abaissera du point D une perpendiculaire sur l'axe de rotation PQ, on la coupera par un arc de cercle décrit du point Q comme centre avec le rayon QD′, et, en joignant QD″, on aura le rabattement de la trace verticale de notre plan auxiliaire, de sorte qu'en joignant le point D″ avec la trace horizontale E de la droite (BC, B′C′), on obtiendra le rabattement de cette droite. On déterminera semblablement les rabattements F″G et I″H des droites (AC, A′C′) et (AB, A′B′), et on aura une vérification en ce que les points *a* et A, *b* et B, *c* et C devront se trouver sur des perpendiculaires à PQ. Cela posé, le centre *o* du cercle circonscrit au triangle *abc* sera le rabattement de celui que l'on demande. Pour déterminer les projections de celui-ci, je ramène le plan auxiliaire à sa position primitive, et le point *o* dé-

crira ainsi un arc de cercle dont le plan aura pour trace horizontale la perpendiculaire *o*O à PQ, de sorte que sa projection horizontale se trouvera sur cette droite. Mais, d'un autre côté, si l'on joint le point *o* au point *b*, la droite ainsi déterminée aura pour trace horizontale le point K, de sorte que ses projections seront BK et B'K' : donc le centre cherché aura pour projections O et O', et pour rayon *bo*.

Problème XXIII.

57. *Circonscrire une sphère à un tétraèdre donné, ou, ce qui revient au même, faire passer sa surface par quatre points donnés.*

Fig. 35. Nous prendrons pour plan horizontal celui de l'une quelconque, ABC par exemple, des faces du tétraèdre, et soit (S, S') le quatrième sommet. Le centre de la sphère demandée doit se trouver sur la verticale menée par le centre O du cercle qui passe par les trois points A, B, C. D'un autre côté, si l'on joint le point (S, S') à l'un quelconque (B, B') des trois autres sommets, la droite ainsi tracée sera une corde de la sphère, de sorte que le centre devra se trouver sur le plan élevé perpendiculairement à la droite (BS, B'S') par son milieu, et, par conséquent, on obtiendra ce centre en cherchant l'intersection de ce plan avec la verticale tirée par le point O; mais comme cette construction serait assez compliquée, on observera que si l'on joint le point (S, S') au point (D, D'), où la circonférence ABC est coupée par le plan mené par le premier de ces points parallèlement au plan vertical de projection, cette droite sera aussi une corde de la sphère, mais parallèle au plan vertical de projection; donc le plan perpendiculaire sur son milieu, sera perpendiculaire à celui-ci, de sorte que sa trace verticale sera la perpendiculaire O'E' élevée sur le milieu de S'D'. Donc le centre de notre sphère est le point (O, O'). Quant à son rayon, nous l'obtiendrons en prenant GF

égal au rayon du cercle ABC, et en joignant O'F, car il a pour projections OB et O'B'.

Problème XXIV.

58. *Inscrire une sphère dans un tétraèdre.*

Prenons encore pour plan horizontal celui de l'une quelconque, ABC par exemple, des faces de ce tétraèdre, Fig. 36. et soit (S, S') le quatrième sommet ; nous savons que le centre de la sphère demandée doit se trouver à l'intersection des plans bissecteurs des trois angles dièdres AB, BC et AC (G., **505**, 2°), de sorte que ce centre est le sommet du tétraèdre déterminé par ces trois plans et par le triangle ABC. Il s'agit donc de trouver ce sommet, et pour cela de déterminer les directions des trois arêtes qui y aboutissent.

Pour y parvenir, à l'aide de trois plans verticaux conduits par le sommet (S, S') perpendiculairement aux trois arêtes AB, BC et AC, je construis les angles S'D'*s*, S'E'*s*, S'F'*s*, correspondants aux trois angles dièdres AB, BC et AC; puis je partage ces angles chacun en deux parties égales par les droites D'*d*', E'*e*', F'*f*'; les angles que ces dernières droites formeront avec LT seront égaux à ceux que formeraient, avec la base ABC, les faces de la pyramide dont nous cherchons le sommet, de sorte que si, par les points D, E et F, on menait dans les plans verticaux SD, SE et SF des droites qui fissent, avec les traces horizontales de ces plans, des angles respectivement égaux à *d*'D'*s*, *e*'E'*s*, *f*'F'*s*, ces droites seraient tracées dans les faces de cette pyramide. Par conséquent, en construisant les projections horizontales des points où ces mêmes droites sont coupées par un plan horizontal quelconque L'T', on aura trois points de la section faite par ce plan dans notre pyramide inconnue, section dont les côtés sont parallèles à ceux de la base ABC. Or, la trace verticale de ce plan coupe les droites D'*d*', E'*e*', F'*f*' respectivement aux points *d*', *e*' et *f*', desquels j'abaisse sur LT

les perpendiculaire *d'd, e'e, f'f*; je porte ensuite les trois distances D'*d*, E'*e*, F'*f*, sur les droites respectives DS, ES, FS, et les points δ, ε et φ, ainsi déterminés, sont les trois points dont il s'agit. Je mène donc par ces points des parallèles aux côtés respectifs AB, BC et AC de la base et je forme ainsi la projection horizontale *abc* de l'intersection du tétraèdre cherché par le plan horizontal L'T', de sorte que les arêtes de ce tétraèdre auront, pour projections horizontales, les droites A*a*, B*b* et C*c*; donc leur point de concours O sera la projection de son sommet, c'est-à-dire du centre de la sphère demandée.

Pour en avoir la projection verticale O', nous projetterons le point *a* en *a'* sur L'T', et, en joignant A'*a'*, nous aurons la projection verticale de l'arrête qui aboutit au point A, de sorte qn'en abaissant de O une perpendiculaire sur la ligne de terre, nous obtiendrons le point O', et les cercles décrits des points O et O' avec le rayon O'R' seront les deux projections de la surface sphérique.

Problème XXV.

59. *Construire les points d'intersection d'une droite avec une surface conique données.*

Menons un plan par la droite donnée et par le centre de la surface conique, et il est clair que les points demandés appartiendront aux génératrices suivant lesquelles ce plan coupera la surface; or, les pieds de ces génératrices seront les points où la trace horizontale de notre plan rencontre celle de la surface; donc elles seront déterminées et la question sera remenée à construire leurs points d'intersection avec la droite donnée.

Problème XXVI.

60. *Construire les points d'intersection d'une droite avec la surface d'une sphère données.*

Le plan qui projette notre droite horizontalement

coupe la sphère suivant un petit cercle dont les points d'intersection avec cette droite sont ceux mêmes que l'on cherche. Soient donc (O, O′) le centre de la sphère et (AB, A′B′) la droite donnés. Le diamètre du petit cercle dont il s'agit sera évidemment la corde CD que AB laisse dans le cercle OCD. Si donc on rabat le plan vertical AB sur le plan horizontal, le centre de ce petit cercle viendra se placer sur la perpendiculaire OE à une distance de E égale à O′F, car il est le pied de la perpendiculaire abaissée de (O, O′) sur le vertical AB : donc il sera facile de tracer le rabattement de ce cercle. On obtiendra de même celui AH de la droite donnée, en construisant les rabattements de deux de ses points. De sorte que *m* et *n* sont les rabattements des deux points demandés. On ramènera donc le plan auxiliaire à sa position primitive, et on déterminera ainsi leurs projections horizontales M et N, et par suite leurs projections verticales M′ et N′. Fig. 37.

On pourrait prendre pour plan auxiliaire celui qui serait conduit par la droite donnée et par le centre de la sphère, puis construire les rabattements sur le plan horizontal du grand cercle suivant lequel il coupe la sphère et de la droite donnée, ce qui fera connaître les rabattements des points demandés; de sorte qu'en ramenant le plan auxiliaire à sa position primitive, il sera facile d'obtenir les projections de ces points.

Cette construction est moins simple que la précédente, mais nous engageons cependant les élèves à l'exécuter, parce qu'elle offre une nouvelle application de la méthode des rabattements.

61. Problèmes a résoudre. 1° *Trouver sur une droite donnée un point tel que sa distance à un autre point de cette droite soit égale à une droite donnée m* (**14**).

2° *Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données* (**14** et **17**).

3° *Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux droites données.* Par le point donné et chacune des deux droites, conduisez des plans, et leur intersection résoudra le problème.

4° *Par un point donné sur le plan vertical, mener une droite qui fasse des angles* α *et* β *avec les plans de projection.*

5° *On donne la projection horizontale d'un point et sa distance à un plan connu, déterminer la projection verticale de ce point.* — Si, par le point cherché, on mène un plan vertical perpendiculaire au plan donné, le pied de la perpendiculaire, dont la longueur est connue, se trouvera sur l'intersection de ces deux plans.

6° *Trouver sur une droite donnée un point dont la distance à un point donné soit égale à une droite donnée* (**34**).

7° *Construire un plan qui ait pour trace horizontale une droite donnée et qui fasse avec le plan vertical un angle donné.* — Discussion.

8° *Mener un plan qui fasse avec les plans de projection des angles donnés* α *et* β. — La solution de ce problème est fondée sur ce principe, que les perpendi-
Fig. 20. culaires abaissées du point O sur les hypoténuses des triangles rectangles $OA'A''$ et $OB'A^{IV}$ sont égales, car elles ne sont que les rabattements de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan PQR'.

9° *Évaluer le volume d'un tétraèdre, connaissant les projections de ses quatre sommets* (**14**, **17** et **29**).

10° *Mener par une droite donnée* AB (G., fig. 219) *un plan qui fasse un angle donné* k *avec un plan donné* MN. — D'un point quelconque pris sur la droite AB, abaissez une perpendiculaire AO sur le plan MN, puis du pied de cette perpendiculaire, comme centre, décrivez une circonférence dont le rayon soit égal au côté adjacent à l'angle k dans un triangle rectangle AOC dont l'autre côté de l'angle droit se-

rait égal à cette perpendiculaire. La tangente menée à ce cercle par le point B, où son plan est percé par la droite donnée, achèvera de déterminer le plan demandé. Cette construction s'exécutera par la méthode des rabattements. Elle se simplifiera beaucoup si le plan donné est l'un des plans de projection.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE VII. DES SURFACES COURBES.

LIVRE VIII. DES POLYÈDRES.

Numéros des articles.

LIVRE IX. DES AIRES DES CORPS.

LIVRE X. DES VOLUMES.

Numéros des articles.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

FIN DE LA TABLE.

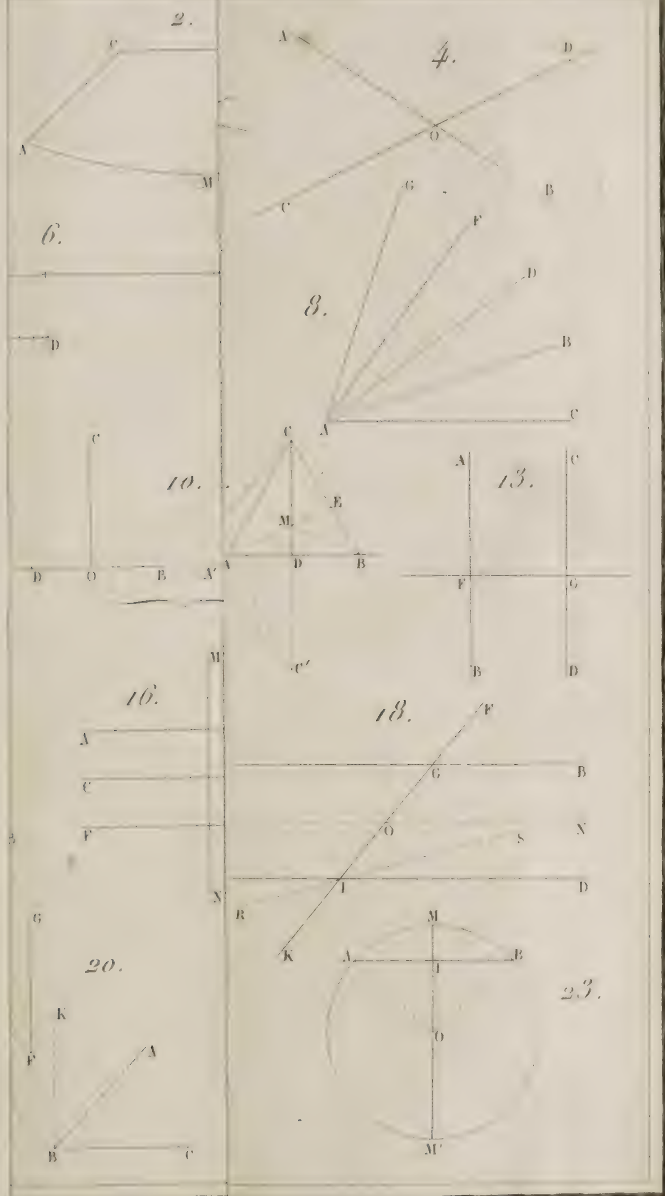
ERRATA.

Page 15, ligne 10, BD, *lisez* DC.
56, ligne 14, *ajoutez à la marge* fig. 48.
60, *descendez* fig. 24 de 6 lignes.
Ibid., *descendez* fig. 56 de 4 lignes.
Page 63, ligne 31, *au lieu de* O''', *lisez* O''.
Ibid., lignes 32 et 38, O'', *lisez* O'''.
Page 70, ligne 9, à droite, *lisez* à gauche.
72, ligne 26, BI, *lisez* $B''I$.
80, ligne 12, *est convexe*, lisez *convexe est*.
100, Fig. 102, *lisez* Fig. 101.
120, dernière ligne, $FBC=F'B'C'$, *lisez* $FBG=F'B'G'$.
124, ligne 35, *a*, lisez *c*.
125, dernière ligne, fig. 125, *lisez* fig. 126.
131, ligne 1, *ajoutez à la marge* fig. 134.
133, ligne 31, fig. 136, *lisez* fig. 137.
141, lignes 18 et 26, fig. 100, *lisez* fig. 102.
Ibid., ligne 20, I, B, I′, C, *lisez* I′, B, I, C.
Page 158, ligne 34, $\sqrt{2R^2-a^2}$, *lisez* $\sqrt{4R^2-a^2}$.
175, ligne 26, n° 353, *lisez* n° 355.
176, ligne 35, $\frac{22}{6}$, *lisez* $\frac{22}{7}$.
192, ligne 24, *ajoutez :*

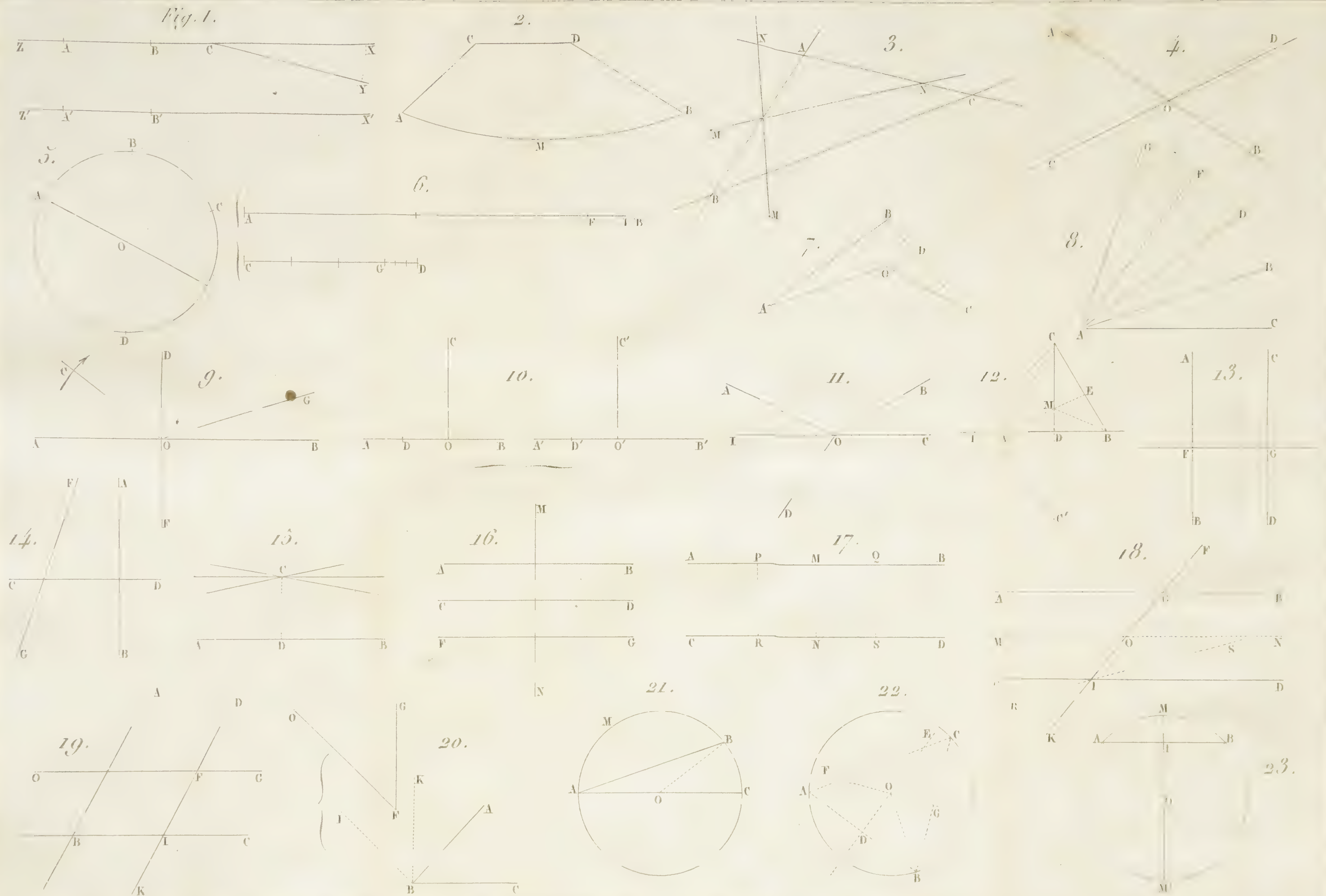
Nous venons de dire que *cerc.* R est la limite de A ; en effet, si l'on inscrit à ce cercle un polygone semblable au polygone régulier qui lui est circonscrit, et que l'on représente respectivement par *a*, *p* et *r* l'aire, le périmètre et l'apothème de ce nouveau polygone, on aura $a=\frac{1}{2}pr$ et par conséquent $\frac{A}{a}=\frac{P}{p}.\frac{R}{r}$. Or, nous avons démontré (349) que les rapports $\frac{P}{p}$ et $\frac{R}{r}$ ont pour limite l'unité ; donc la limite du second membre de l'équation précédente (note, 63) et par conséquent aussi celle du premier est l'unité ; donc la différence entre les quantités A et *a*, et *à fortiori* celle qui existe entre chacune d'elles et l'aire du cercle R, peut être rendue moindre que toute grandeur assignable, donc *cette aire est leur limite commune.*

Page 209, dernière ligne, BC, *lisez* BG.
219, lignes 3 et 4, en partie, *lisez* en cinq parties.
235, ligne 12, *de deux points*, lisez *de tous les points*.
236, ligne 5, fig. 219, *lisez* fig. 220.
249, ligne 35, à la droite, *lisez* sur le milieu de la droite.
250, ligne 13, $S''ABC$, *lisez* $SABC''$.

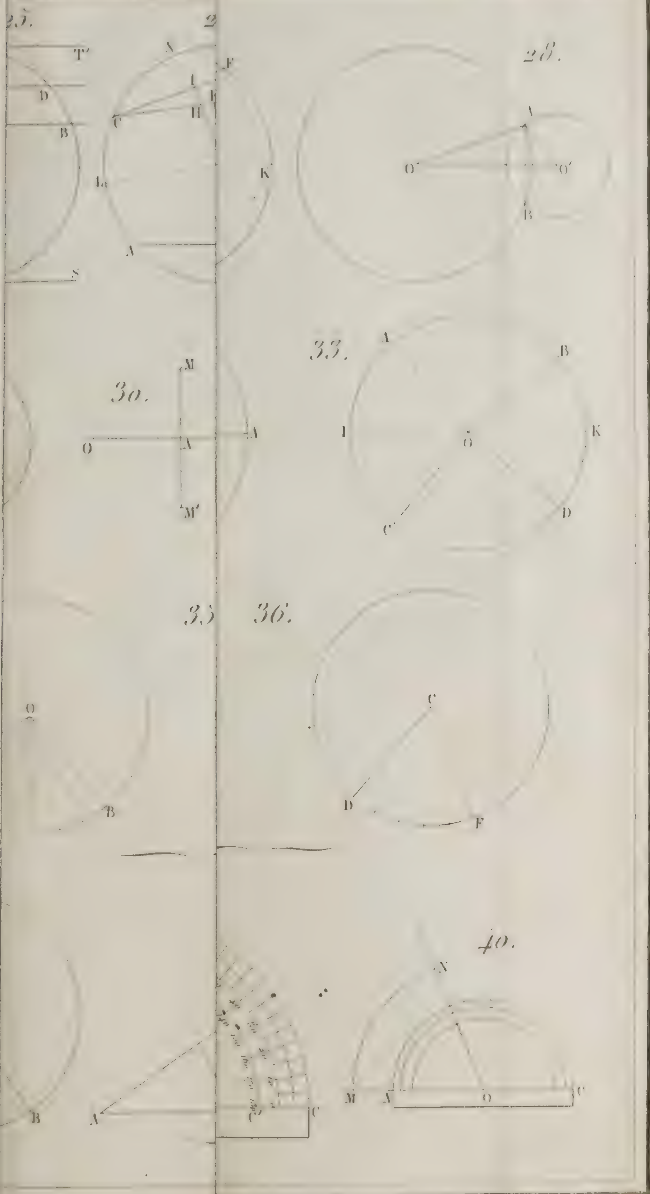
Page 262, dernière ligne, SBC, *lisez* SAB.
263, ligne 1, SAB, *lisez* SBC.
Ibid., ligne 5, SBC *lisez* SCD.
Page 272, ligne 20, *supprimez* isocèles.
296, ligne 32, tétraèdres, *lisez* tétraèdres semblables.
302, ligne 16, CF et C′F′, *lisez* CD et C′D′.
307, ligne 21, leurs faces, *lisez* leurs faces latérales.
315, ligne 20, AC, *lisez* AD
316, lignes 23 et 25, A′B′D′C′, *lisez* A′B′K′L′.
Ibid., *ajoutez après la ligne* 25 :
et comme on aurait une inégalité analogue pour chacun des fuseaux dont se compose la surface courbe du cylindre OG, il en résulte que cette surface est plus grande qu'une surface qui, terminée comme elle aux deux mêmes circonférences GB et OK, l'envelopperait entièrement.
Page 318, ligne 26, AI, *lisez* OI.
328, ligne 9, l' et l', lisez l et l'.
Ibid., ligne 13, $P'' : P' :: P : e'$, *lisez* $P'' : P' :: e : e'$.
Page 334, lignes 4 et 26, $C=2\pi Rh$, *lisez* $C=\pi R^2 h$.
335, ligne 19, *supprimez* la moitié de.
341, ligne 2, *le produit*, lisez *le tiers du produit*.
355, ligne 22, tangents à la surface aux points mêmes où son axe la perce, *lisez* perpendiculaires à l'axe aux points mêmes où il perce la surface.
369, ligne 1, CC′, *lisez* DD′.
371, ligne 35, fig. 242, *lisez* fig. 103.
396, ligne 7, BB′, *lisez* BR′.
Ibid., ligne 8, B′, *lisez* B.
Page 404, ligne 32, (AC, A′C′), *lisez* (BC, B′C′).
419, ligne 36, *supprimez* M′T′.
Ibid., lignes 33 et 37, A′M′B′, *lisez* C′M′B′.



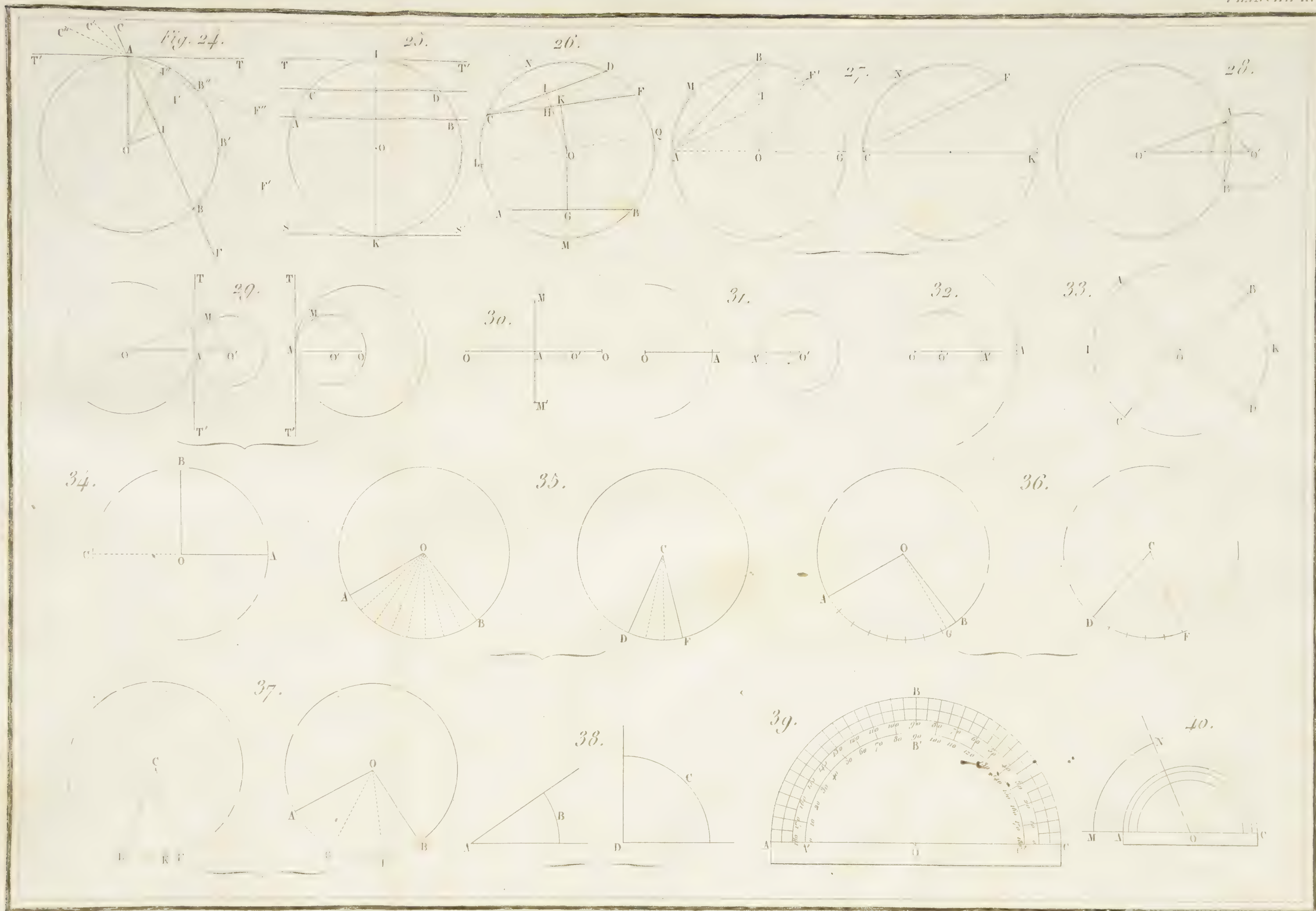
Gravé par Durau.



Librairie de L. Hachette. Gravé par Durau



Gravé par Durau.



Librairie de L. Hachette. Gravé par Dusau

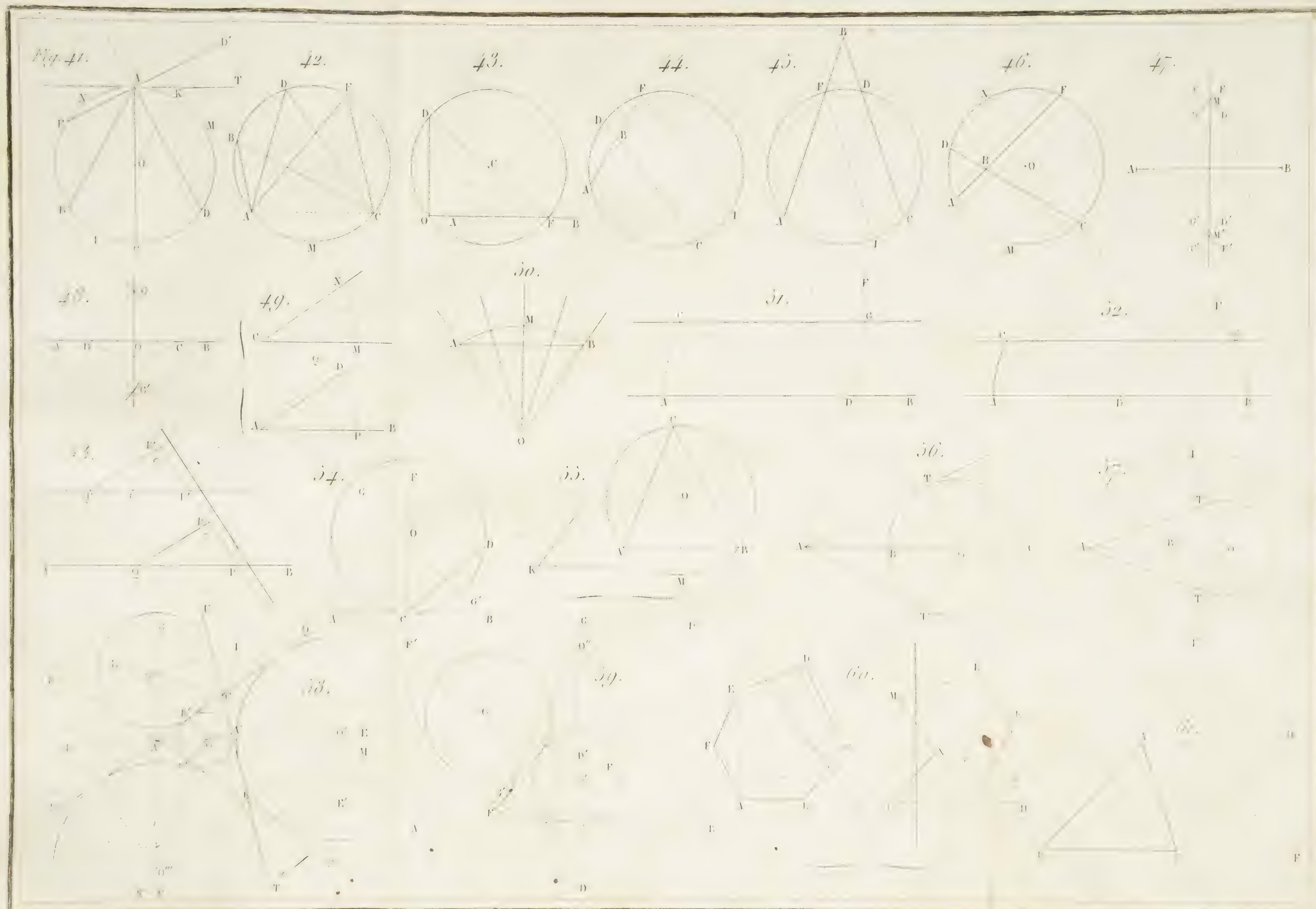
45. *46.* *47.*

50. *52.*

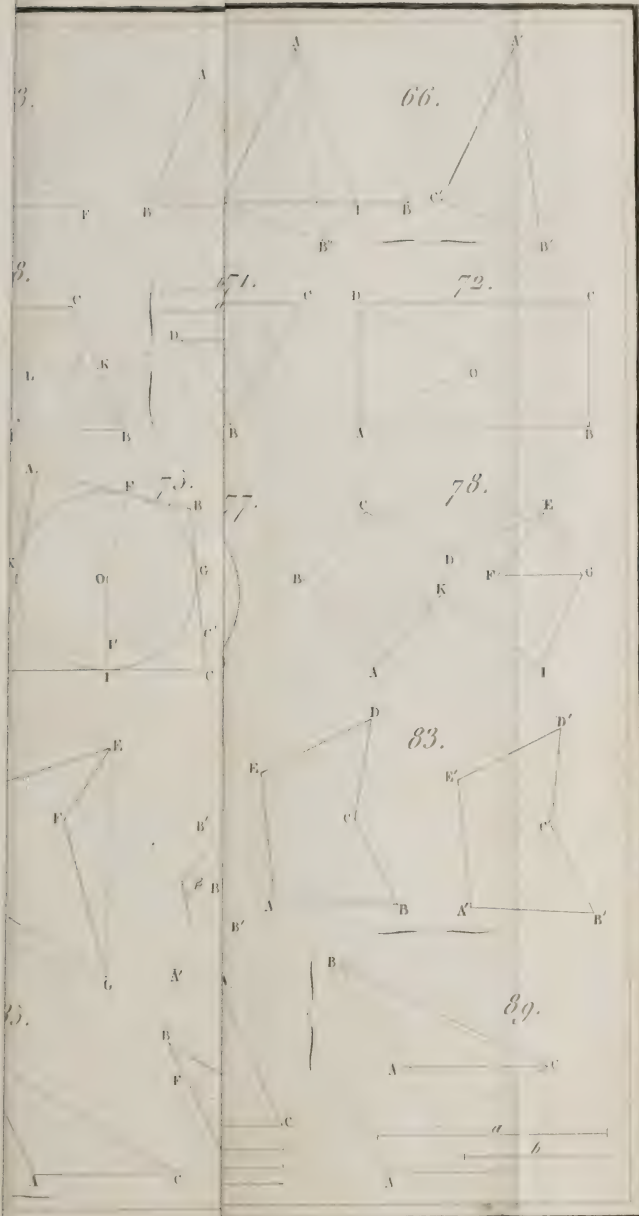
57.

61.

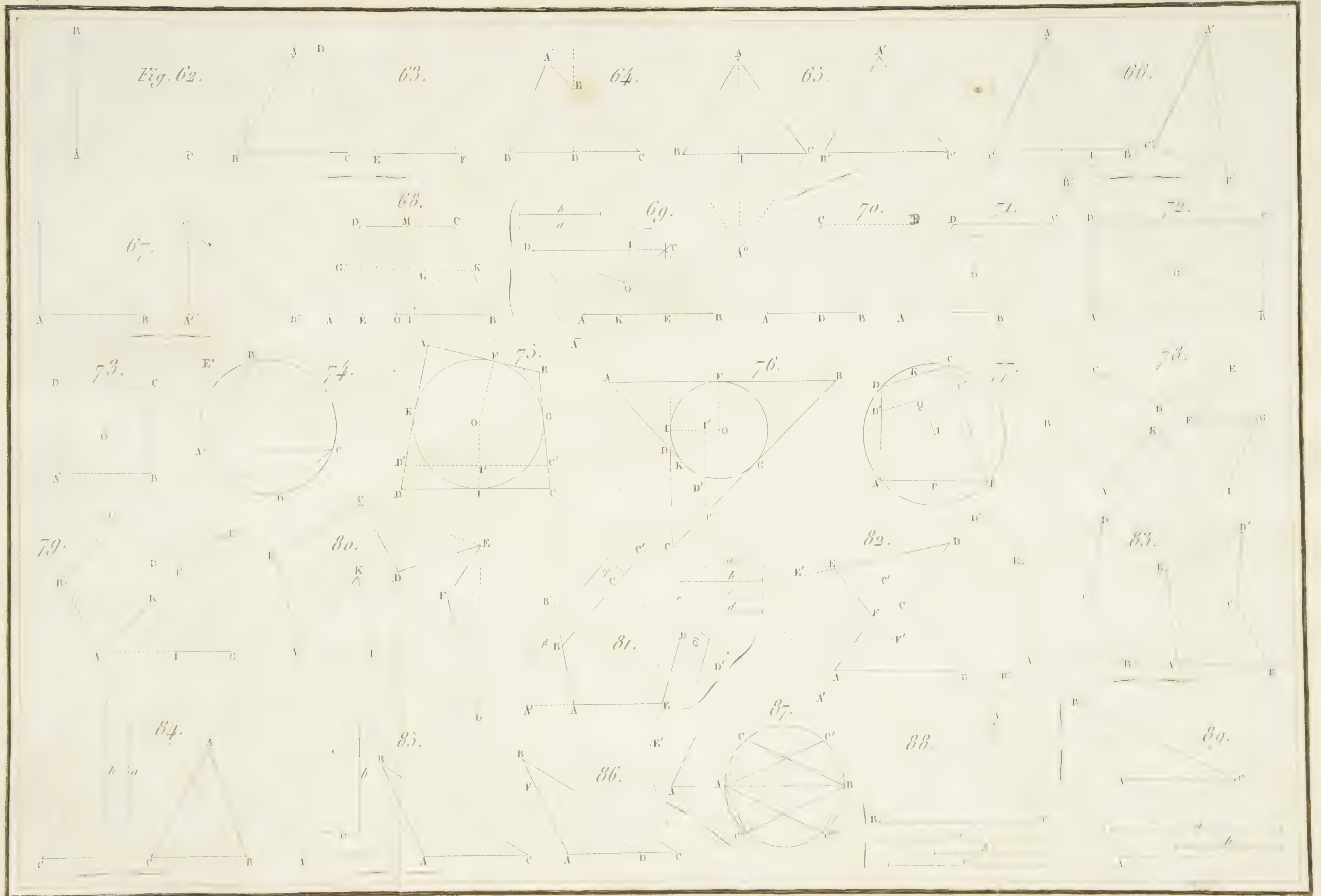
Gravé par Durau.



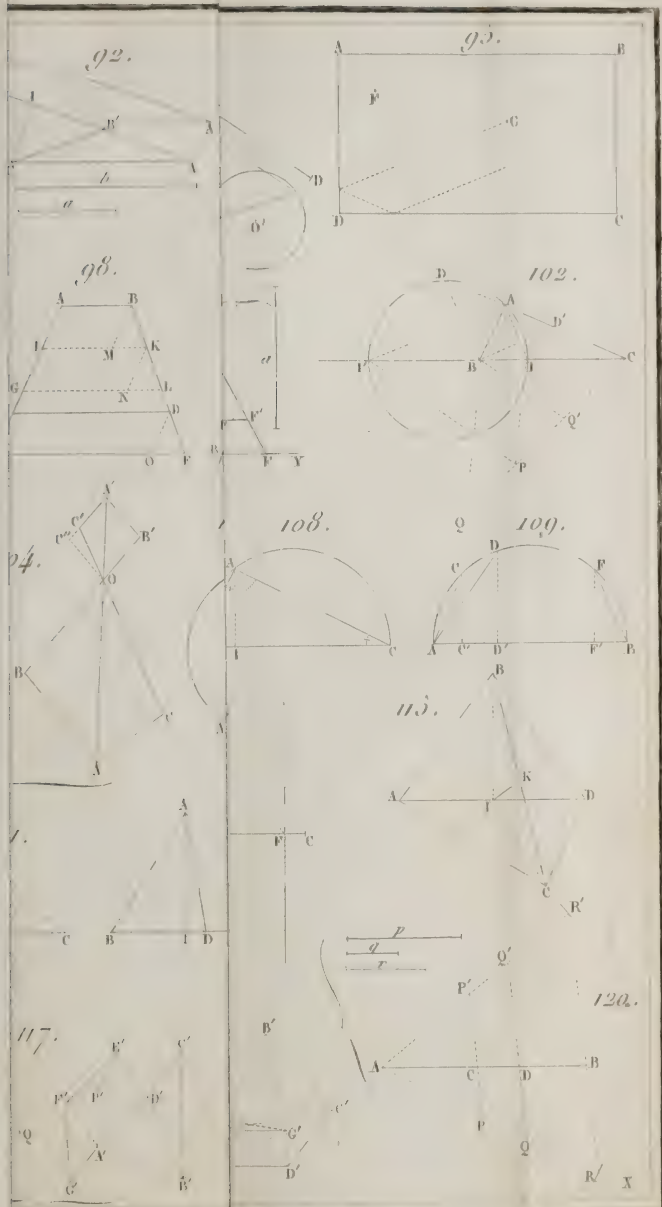
Librairie de L. Hachette. Gravé par Duvau.



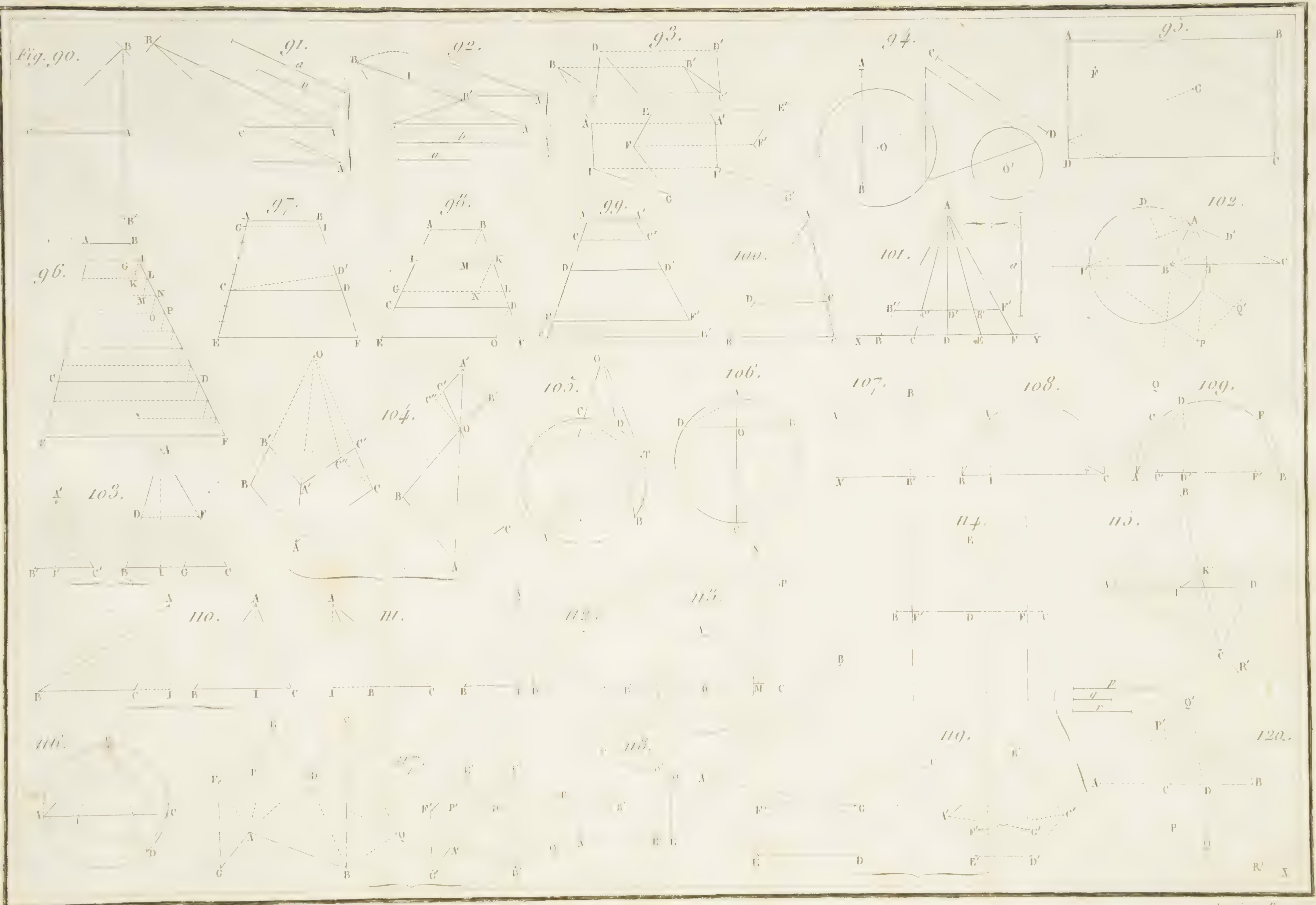
Gravé par Durau



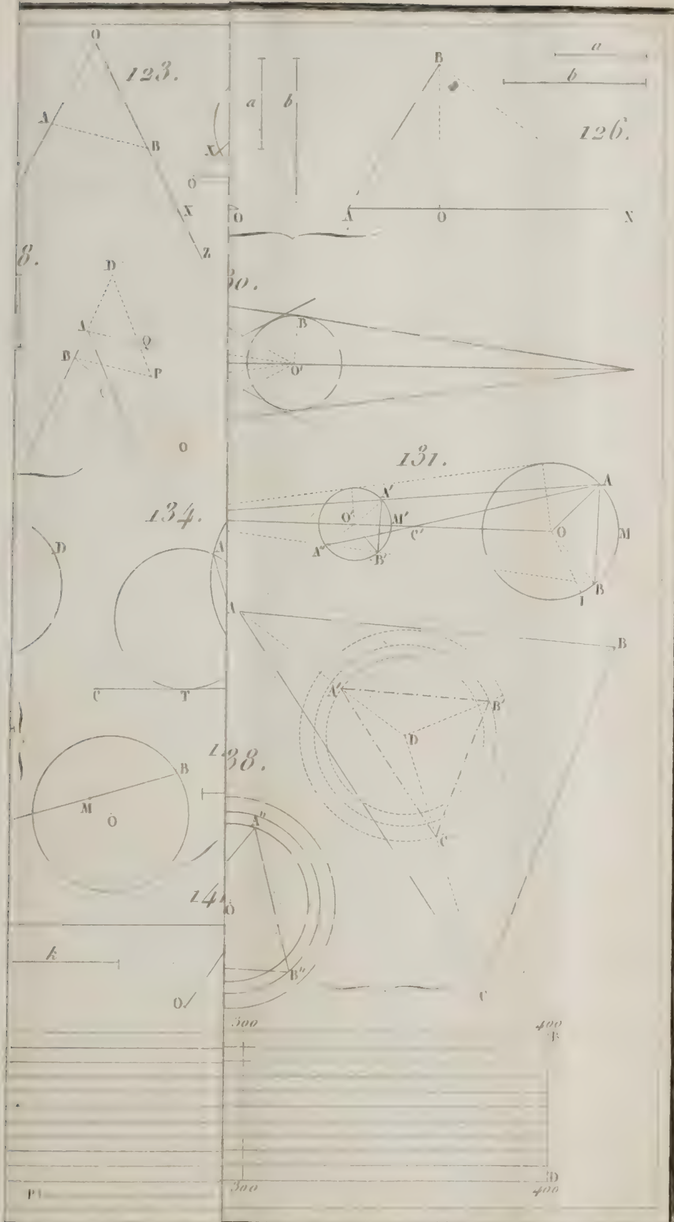
Librairie de L. Hachette
Gravé par Durau



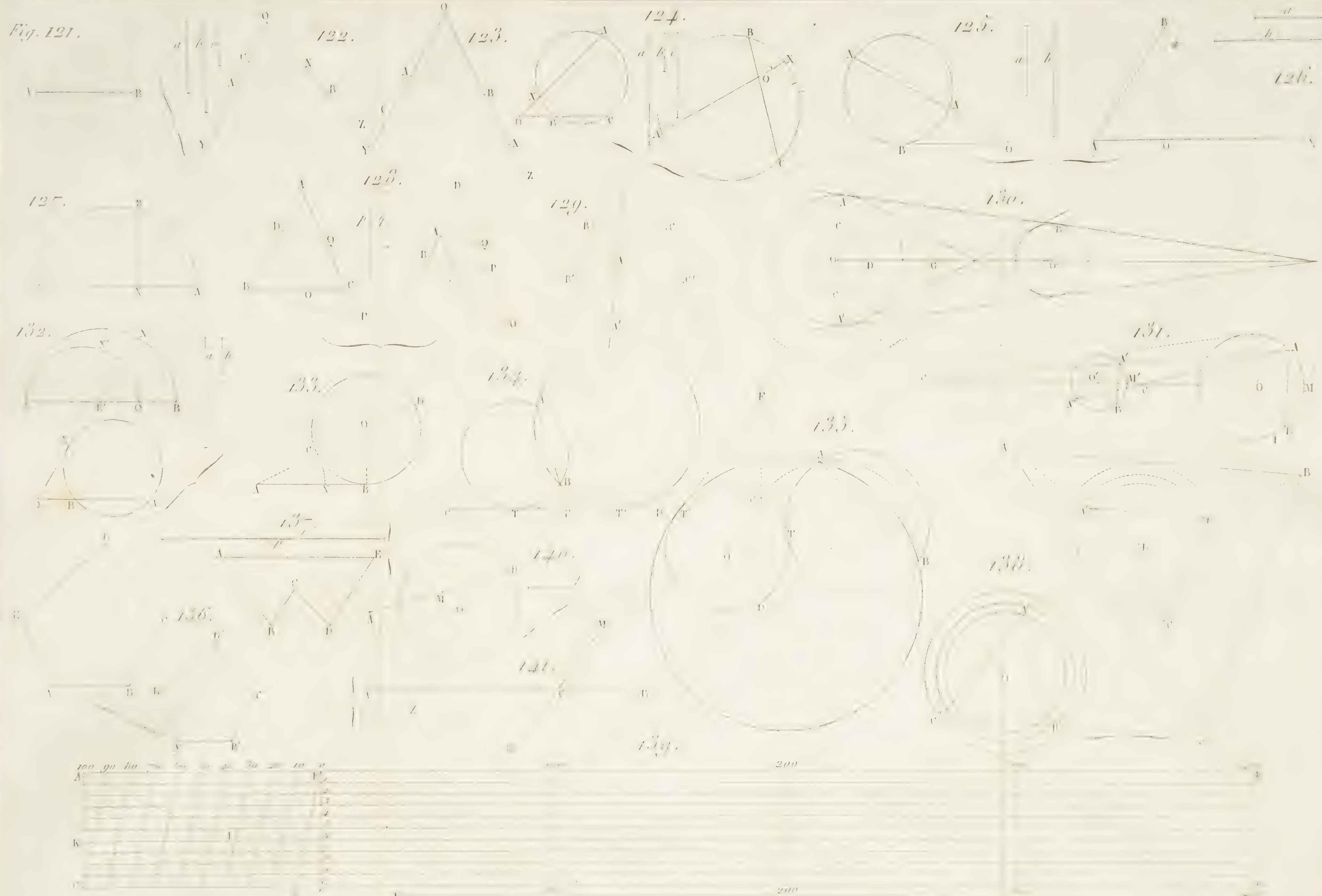
Gravé par Durau



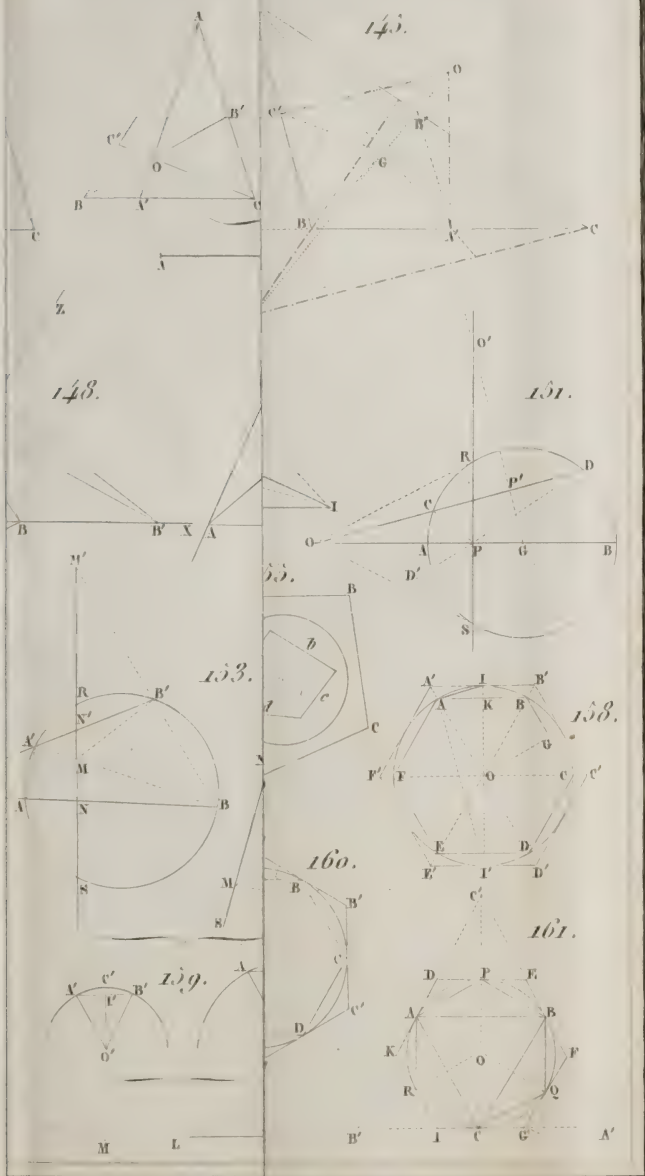
Librairie de L. Hachette
Gravé par Durau



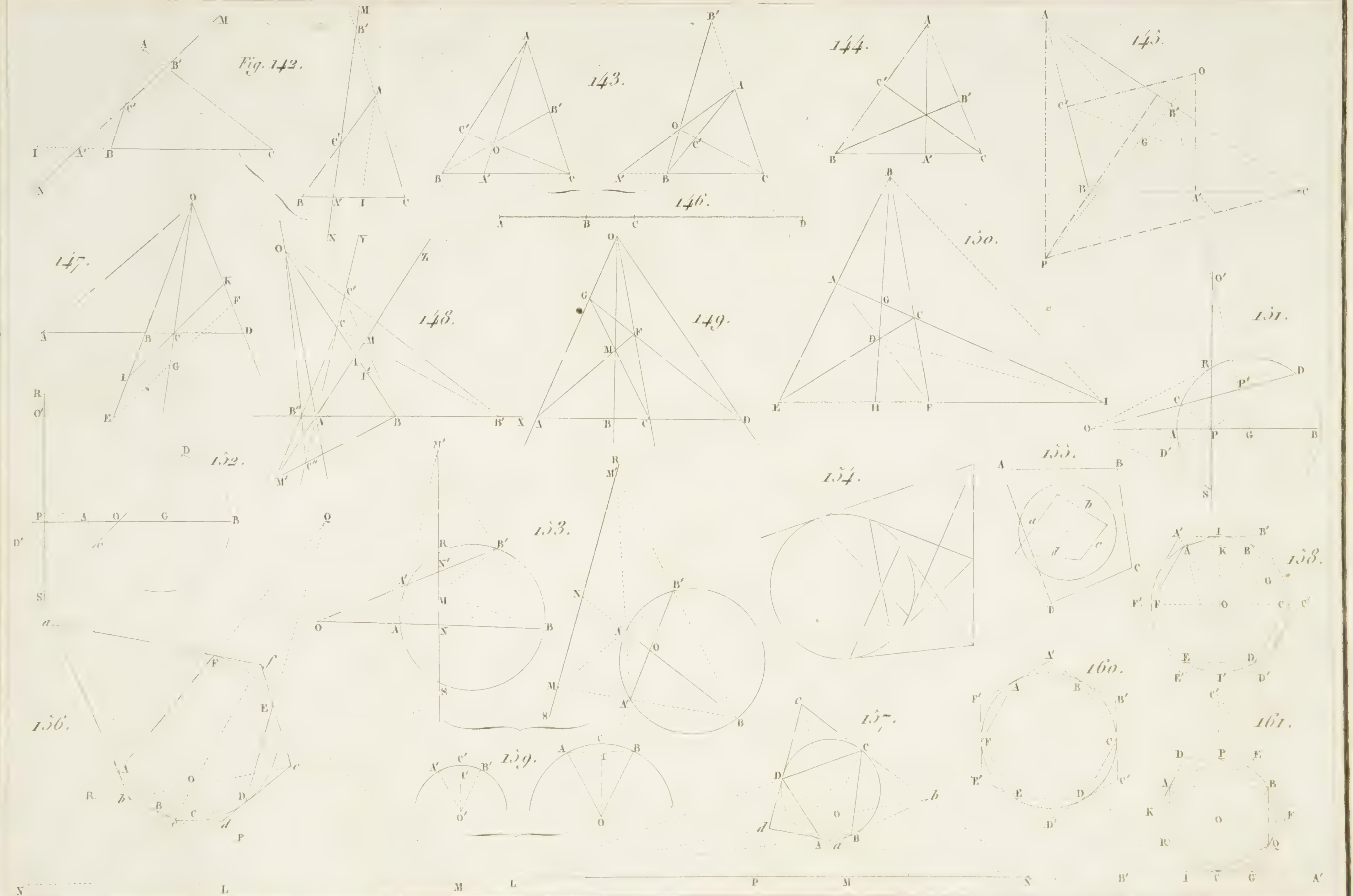
Gravé par Durau



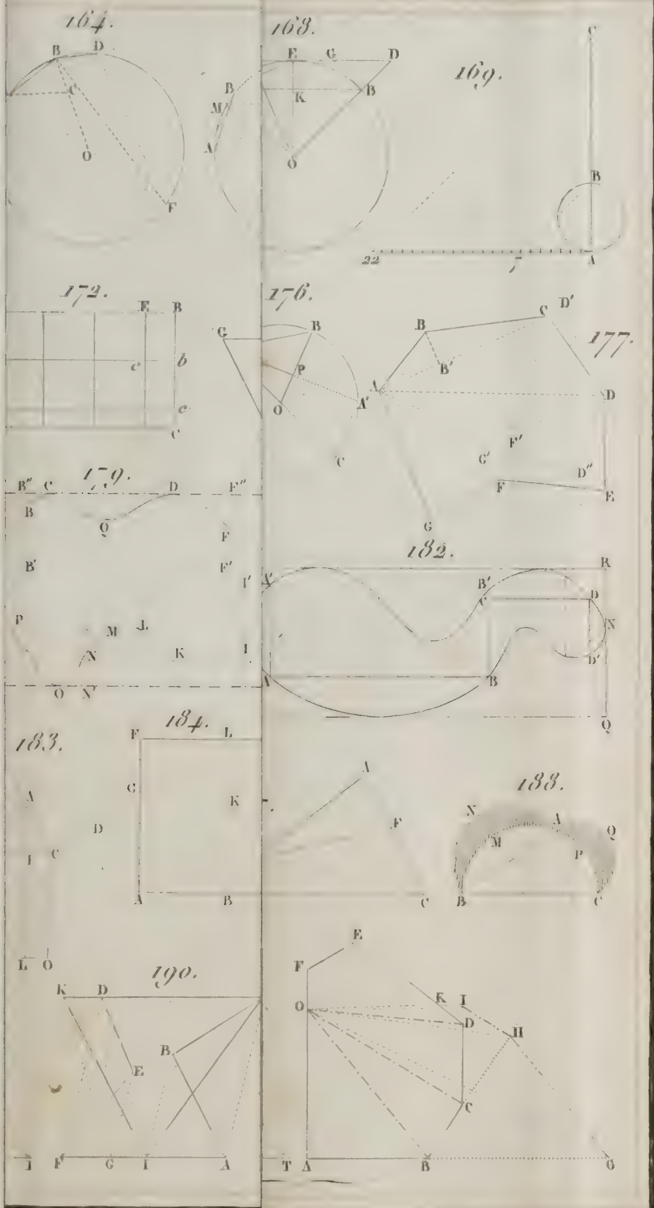
Librairie de L. Hachette



Gravé par Durau.



Librairie de L. Hachette. Gravé par Durau



Gravé par Durau.

Fig. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169.

170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177.

178. 179. 180. 181. 182.

183. 184. 185. 186. 187. 188.

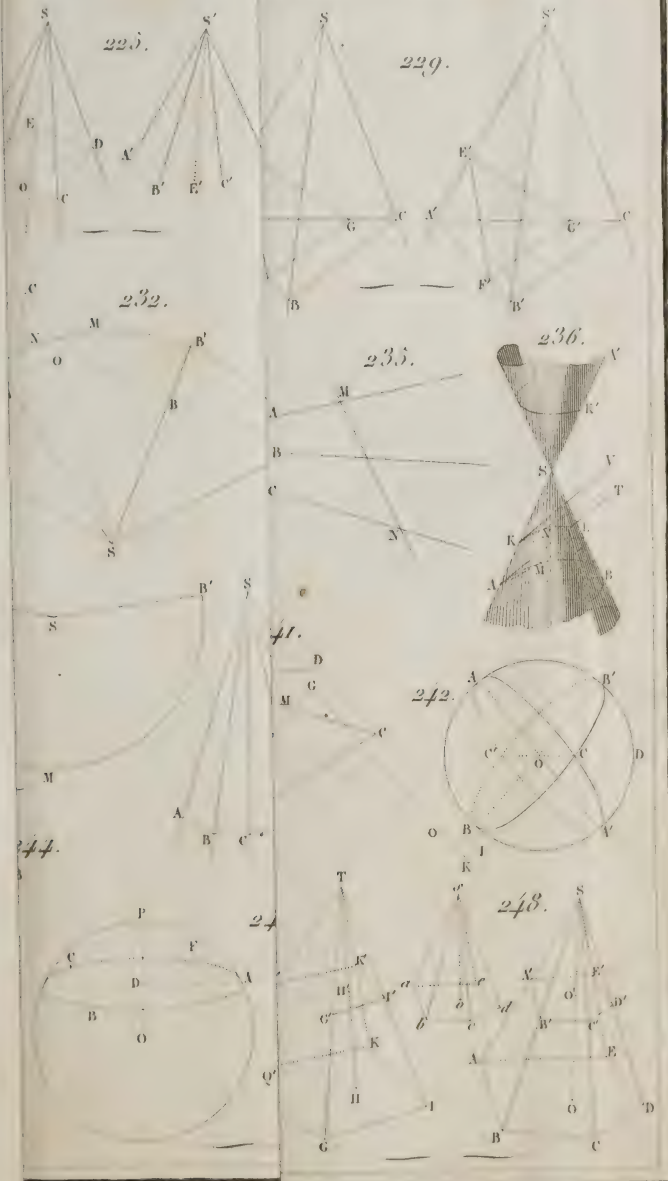
189. 190. 191. 192. 193. 194.

Librairie de L. Hachette.
Gravé par Durau.

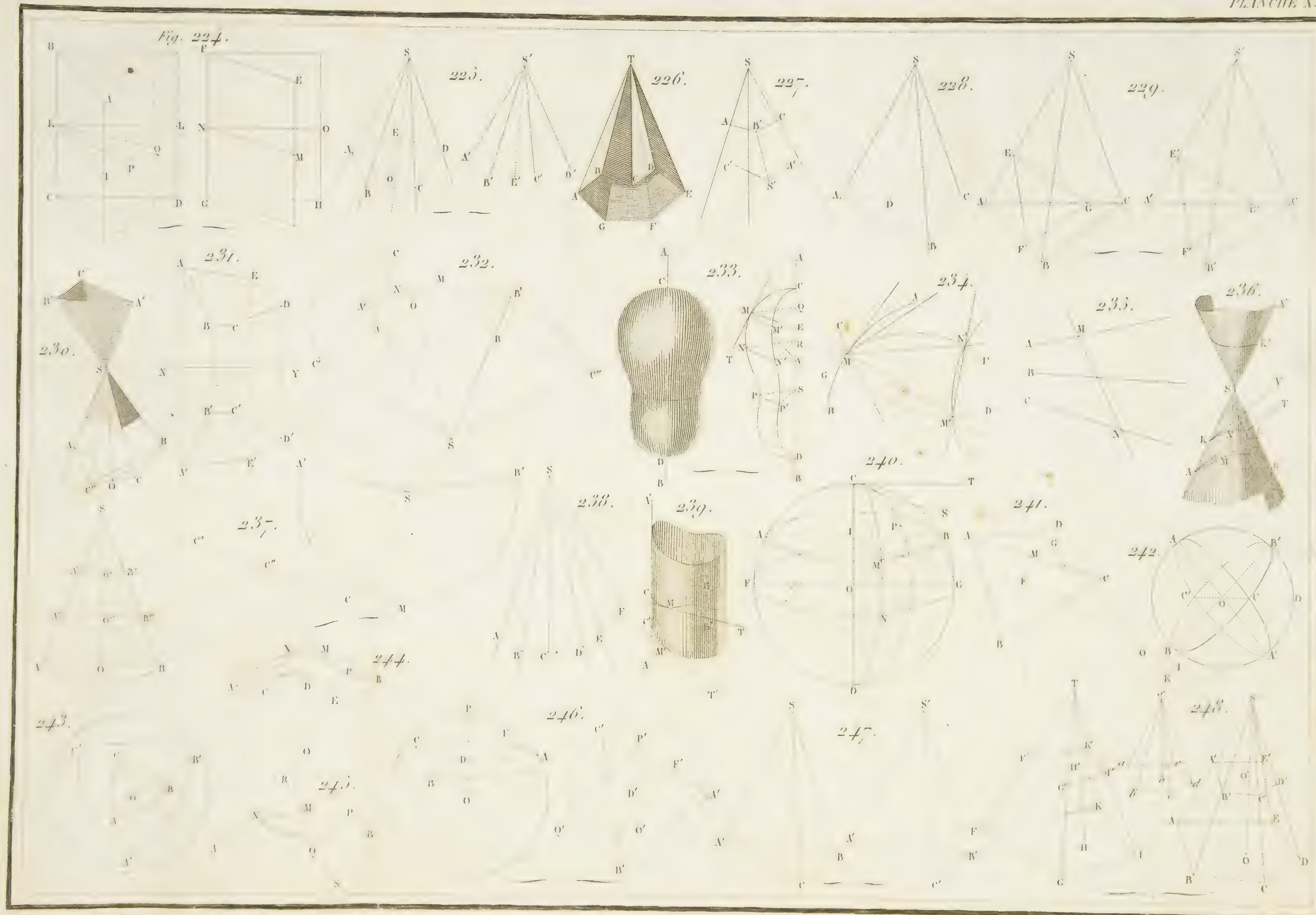
199. 200. 201. 203. 206. 207. 211. 213. 220. 223.

Gravé par Durau.

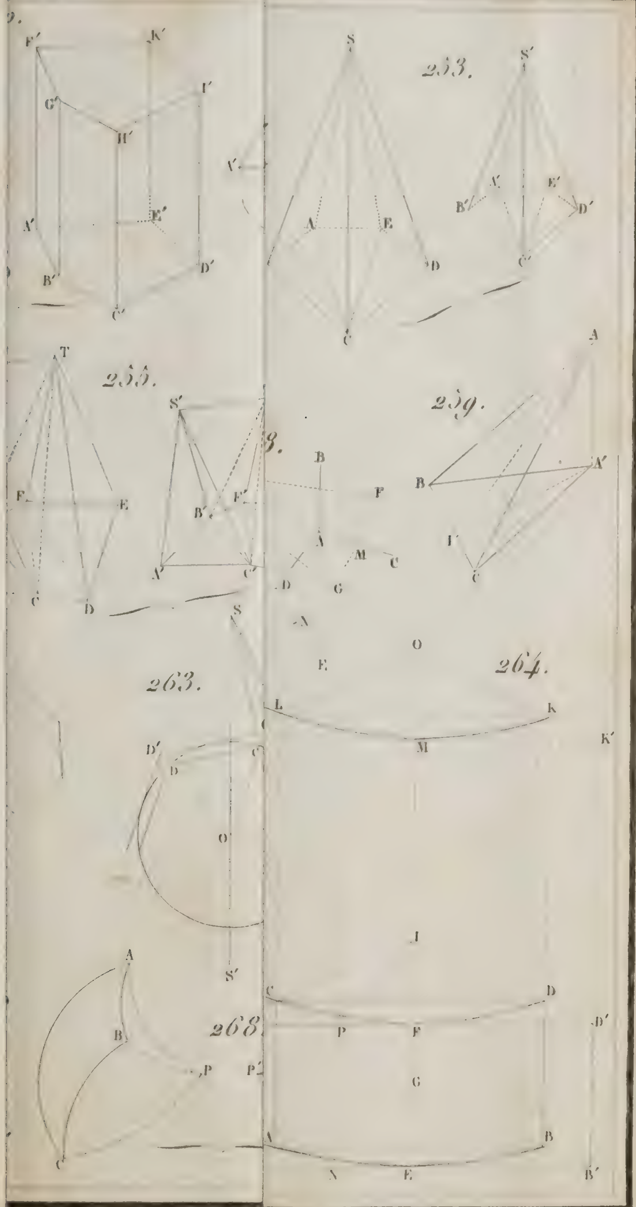
Fig. 195.
196.
197.
198.
199.
200.
201.
202.
203.
204.
205.
206.
207.
208.
209.
210.
211.
212.
213.
214.
215.
216.
217.
218.
219.
220.
221.
222.
223.



Gravé par Durau.



Gravé par Durau.



Gravé par Durau.

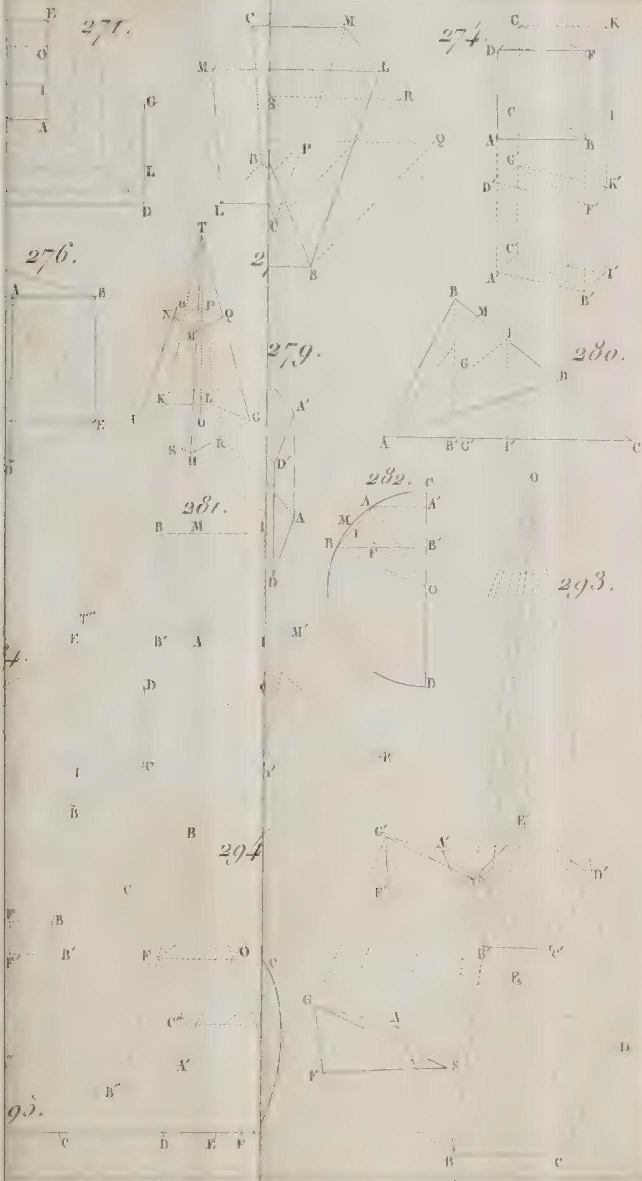
Fig. 249. 250. 251. 252. 253.

254. 255. 256. 257. 258. 259.

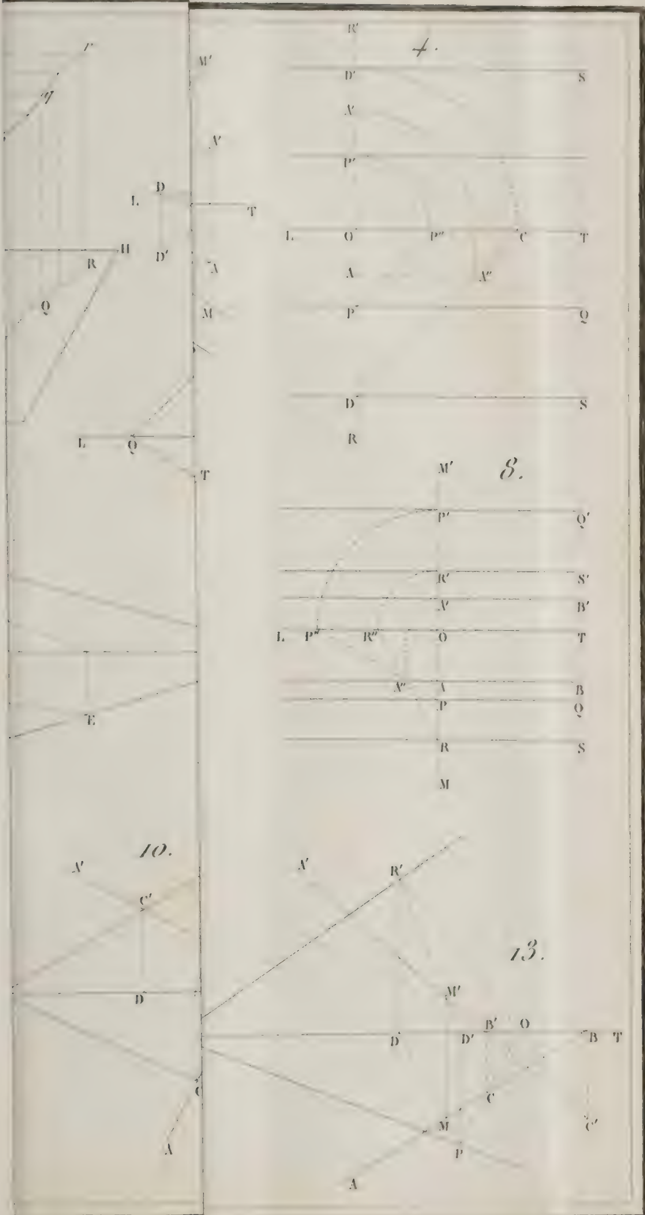
260. 261. 262. 263. 264. 265.

266. 267. 268. 269.

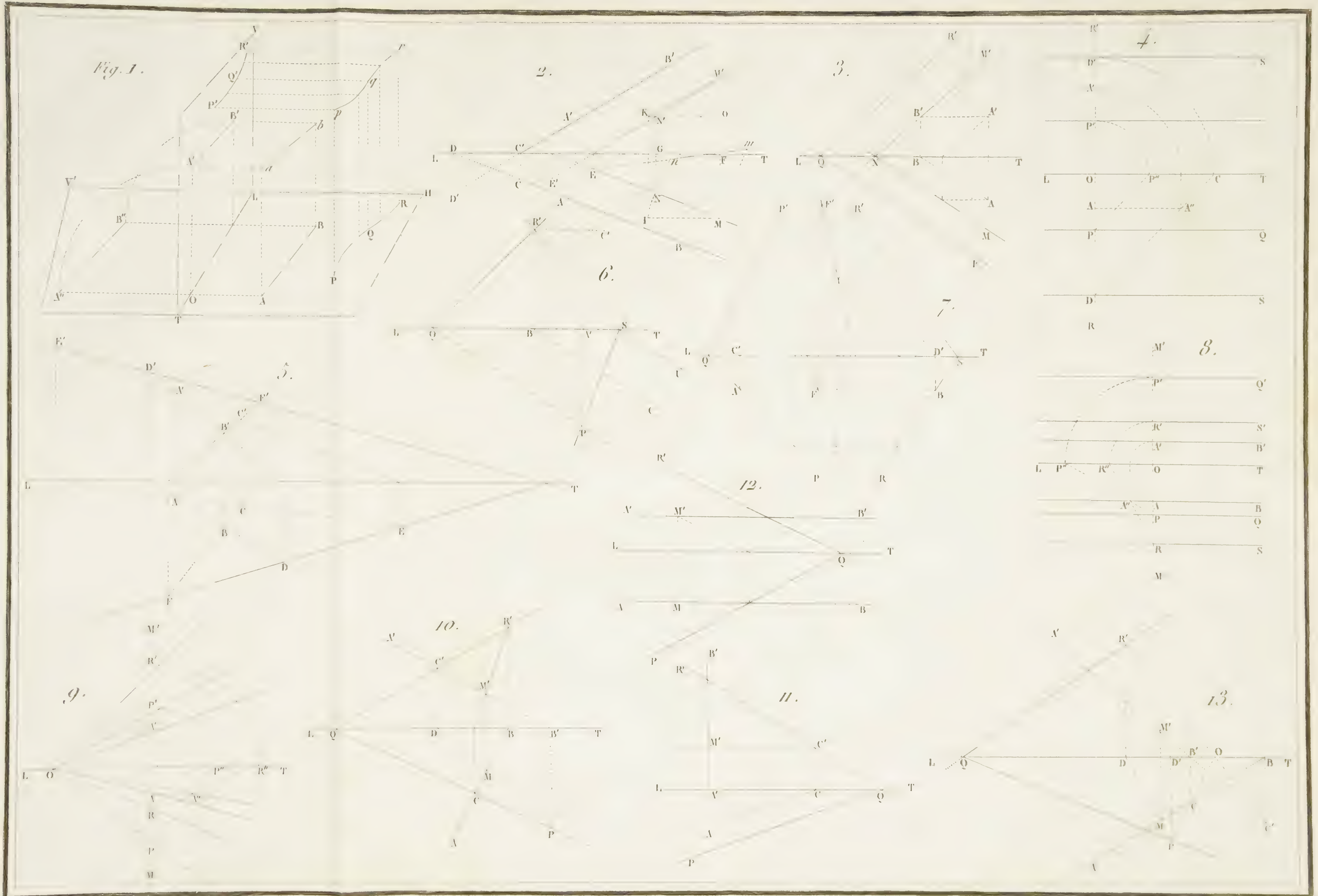
Librairie de L. Hachette. Gravé par Durau.



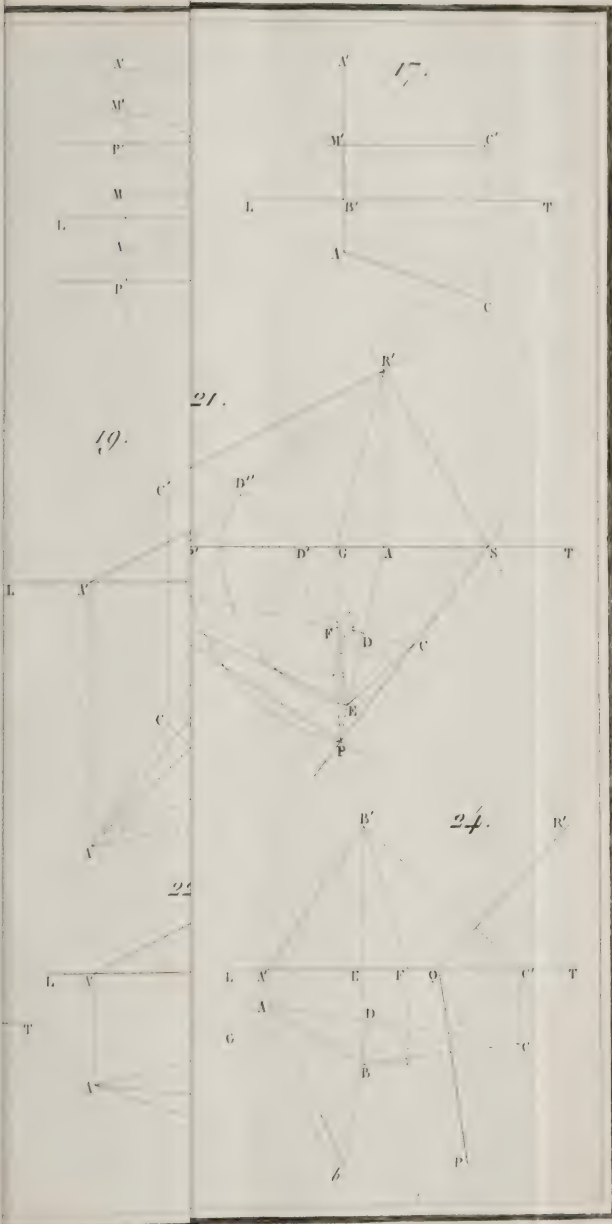
Gravé par Durau.



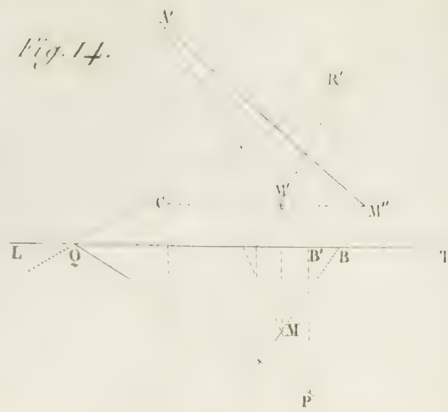
Gravé par Durau

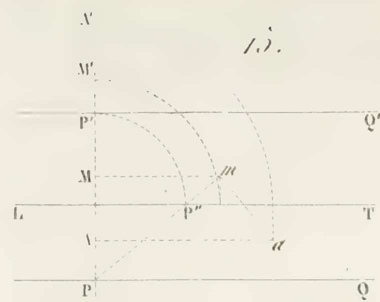


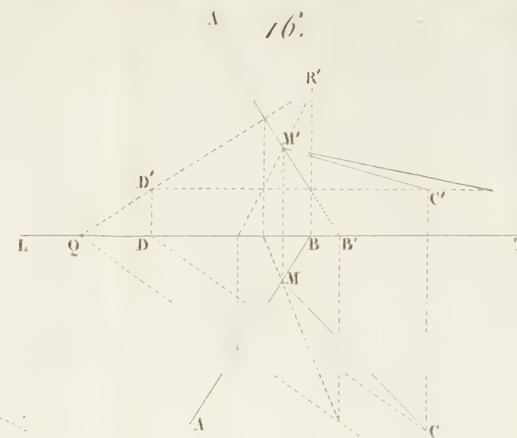
Librairie de L. Hachette. Gravé par Durau

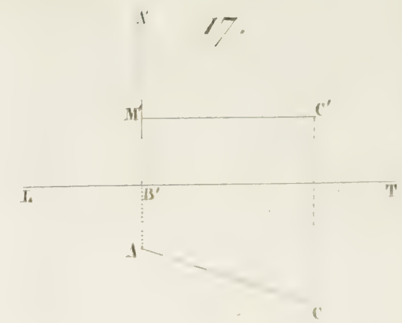


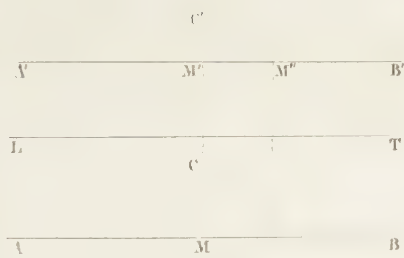
Gravé par Durau



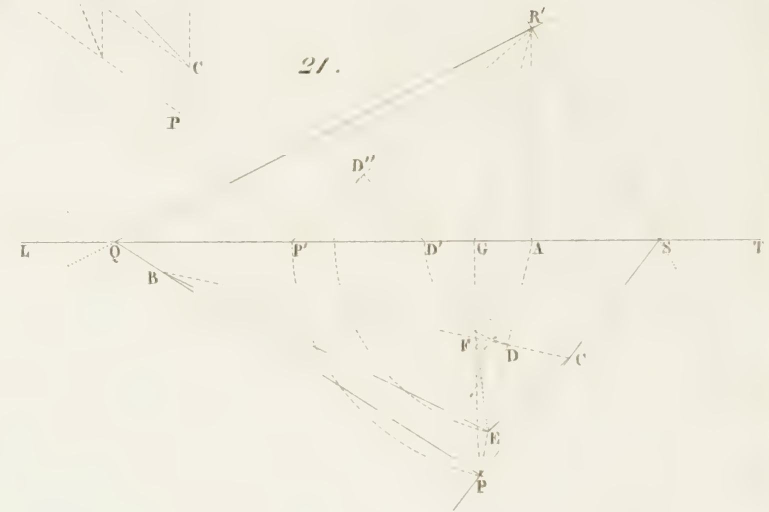


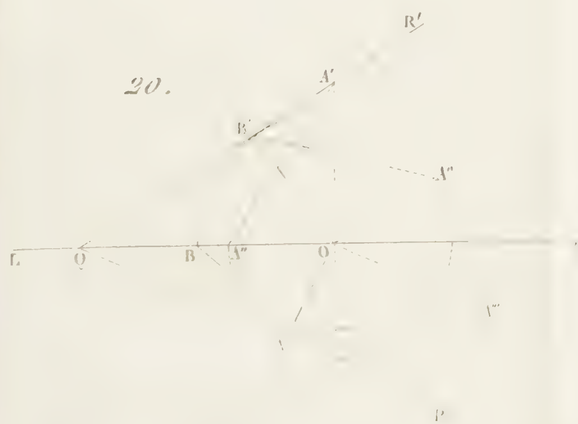


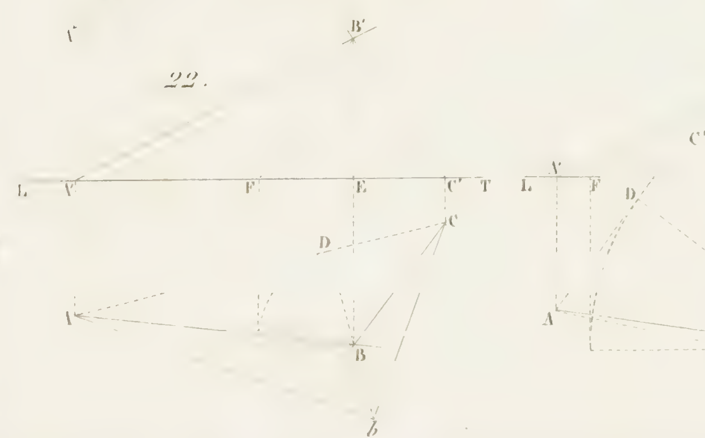




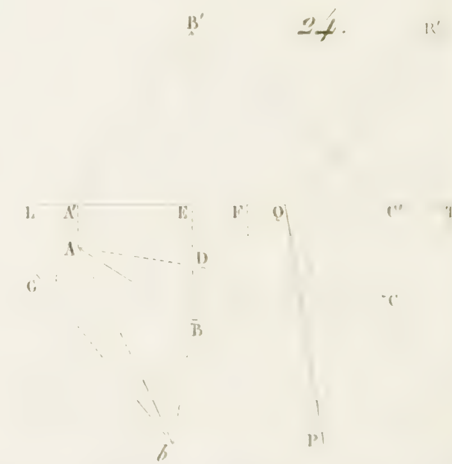




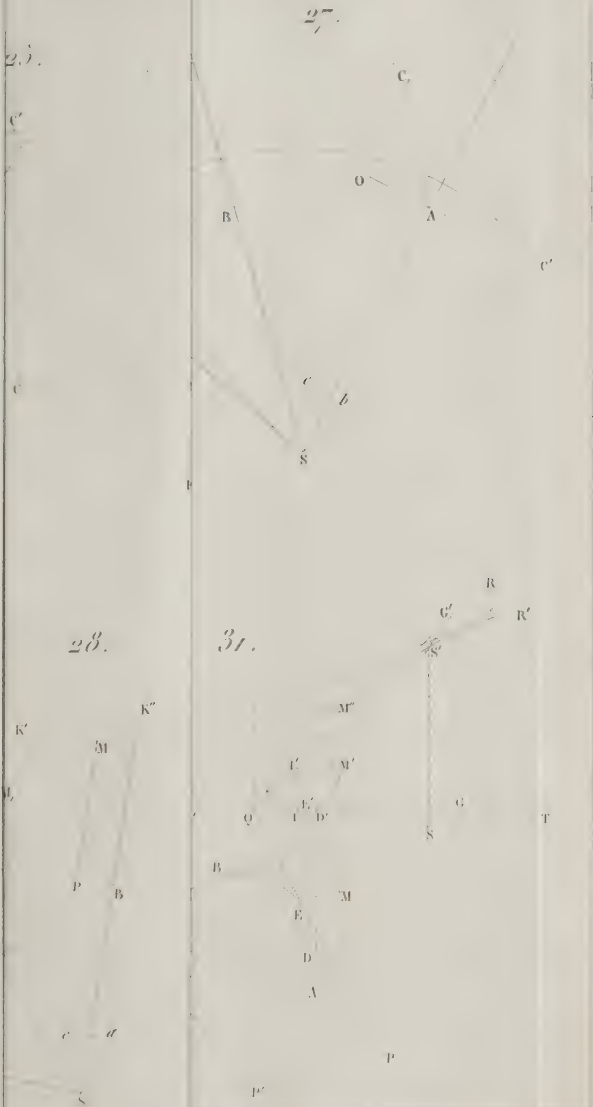








Librairie de L. Hachette.



Gravé par Dureau

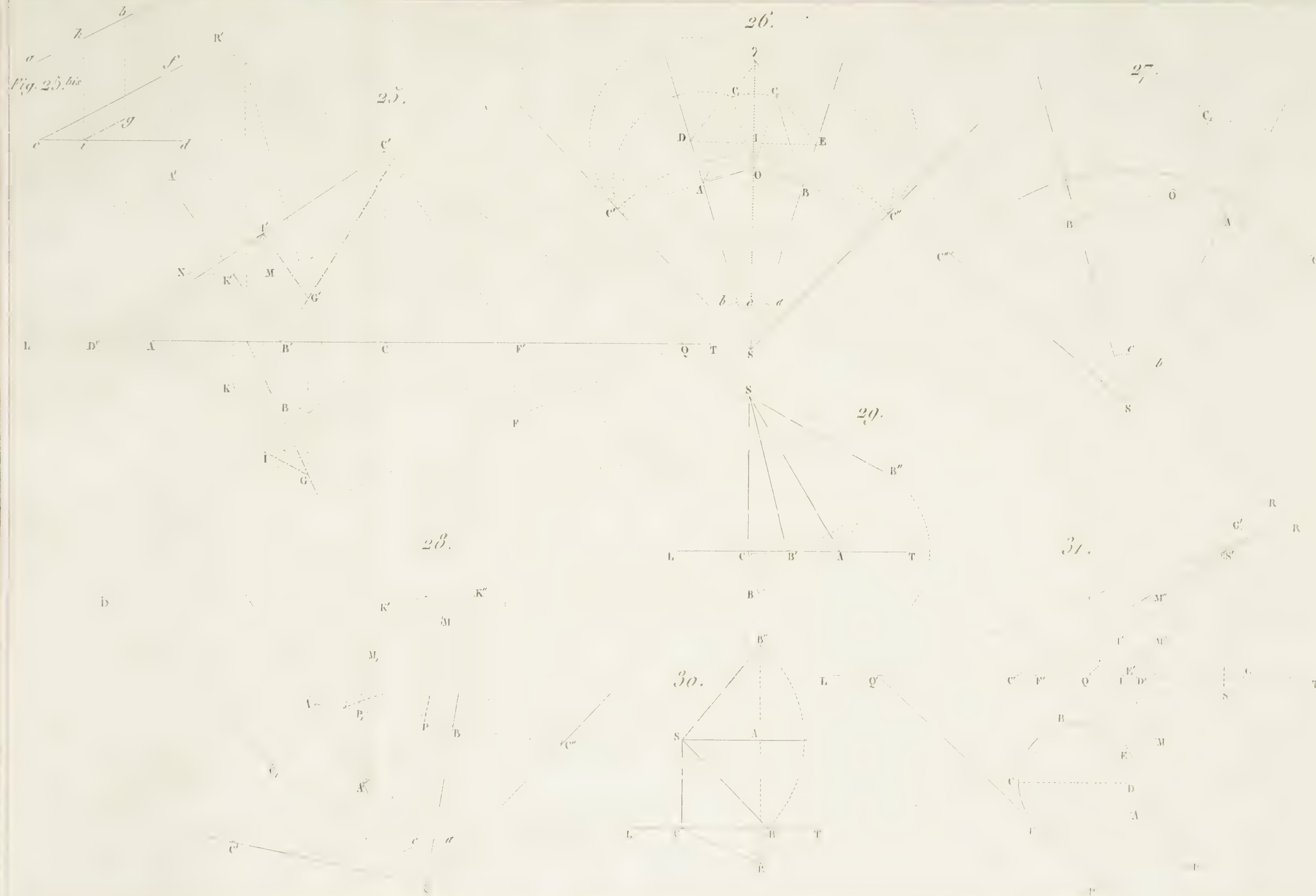
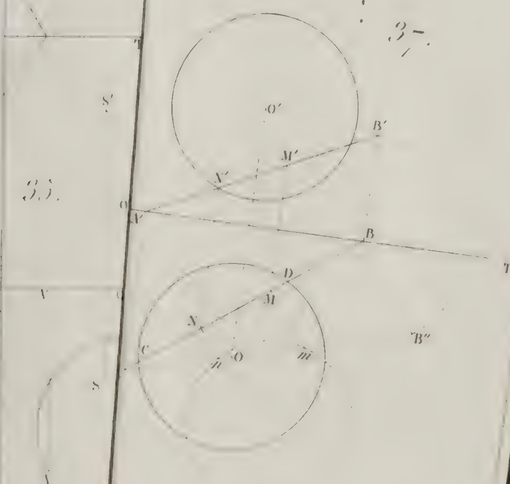
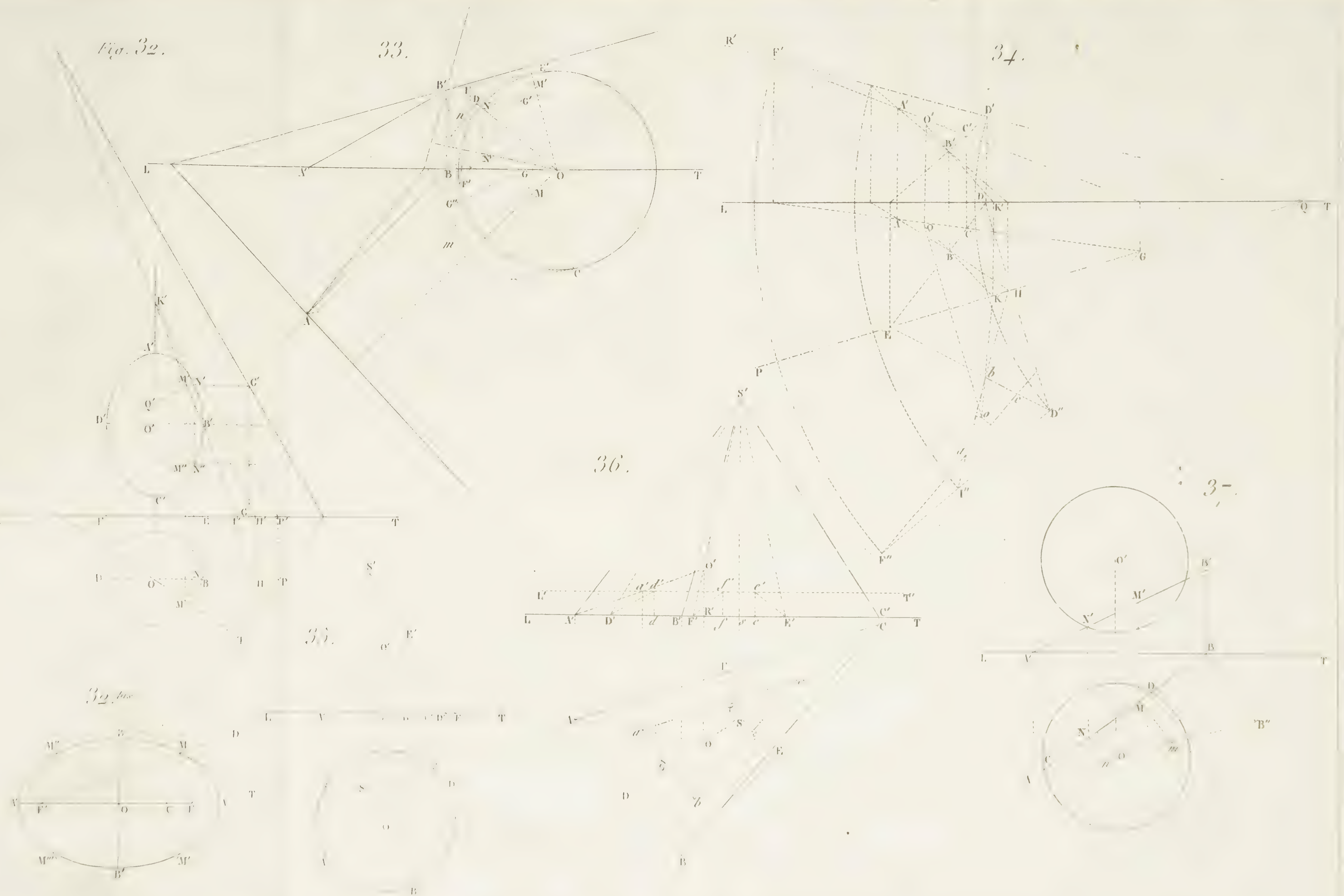

Fig. 25. bis
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.

PLANCHE IV.





Gravé par Durau



Librairie de L. Hachette. Gravé par Durau

